Object: Date:

$E(Q)$ کل نیست

$827 \; S$ برای همه برنامه ها

$612 \; S$ برای همه برنامه ها

مسائل فصل دوم صفحه 173 کتاب نظریه

(الف ۲) $\mu_2 = 2\mu_1 \qquad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \qquad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$

$\lambda_2 = 2\lambda_1 \Rightarrow \rho_2 = \frac{2\lambda_1}{2\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$

$\rho_1 = \rho_2$

$L_1 = E_1(N) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \qquad L_2 = E_2(N) = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$

$\rho_2 = \rho_1 \Rightarrow L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \Rightarrow L_1 = L_2$

چون ρ تغییری نمی کند پس L نیز تغییر نمی کند

$L_{1q} = E_1(N_q) = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \qquad L_{2q} = E_2(N_q) = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2}$

Ghaem

Object: Date: / /

برای این ۷۲۰ برنامه صرف کرده اگر $\frac{(612+827)}{720}$ این کار

را انجام دهیم زمان سرویس یک برنامه بدست می آید پس

$E(S) = \frac{2}{m}$

برای بدست آوردن m گفته کل ۷۵۶۰۰ صفحه خوانده شده

چون برای خواندن هر صفحه به I/O می رود و نیز هر صفحه ای

که می خواند در cpu پردازش می شود پس ۷۵۶۰۰

می شود تعداد دفعاتی که به I/O یا cpu رفته حالا m می شود

تعداد دفعاتی که برای یک برنامه به cpu رفته پس $\frac{75600}{720}$ برای یک برنامه

۱۰۵ بار برای یک برنامه به cpu رفته پس

$E(S) = \frac{2}{105}$ $\qquad \rho = \frac{\text{زمانی که صرف کار کرده مفید بوده}}{\text{کل زمانی که صرف کرده}}$

بقیه فرمول ها نیز بدست می آیند

Ghaem

برای تشکیل صف باید ۲ نفر حداقل در سیستم باشند. با ۱ نفر صف تشکیل نمی‌شود

Object: Date: ۷/۸/۲

$\mu = \frac{1}{4} \times 60 = 15$ نفر در هر ساعت $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$P(N \geq 2) = 1 - P(N < 2) = 1 - (P_0 + P_1) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{2}{9})$

$= 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P_1 = (1-\rho)\rho^1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

الف) $\boxed{L_q = E(N_q)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} = 1.33$

ب) $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{24}} = 12$ ساعت

دقیقه

ج) $P(q > t) = 1 - P(q \leq t)$

$W_q(t) = P(q \leq t) = 1 - \rho e^{-t/W} \rightarrow$

$P(q \leq 5) = 1 - \frac{2}{3} e^{-5/12} \Rightarrow P(q > 5) = 1 - 1 + \frac{2}{3} e^{-5/12}$

$P(q > 5) = \frac{2}{3} e^{-5/12} = 0.43$

Ghaem

$\boxed{e = 2.74}$

۳

Object: Date: / /

$\rho_2 = \rho_1 \longrightarrow L_{2q} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \rightarrow L_{1q} = L_{2q}$

چون ρ تغییری نمی‌کند پس L_q نیز تغییری نمی‌کند.

$W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1}$ $W_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} \xrightarrow{L_2 = L_1 ,\ \lambda_2 = 2\lambda_1} W_2 = \frac{L_1}{2\lambda_1}$

$= \frac{1}{2} W_1$

$W_{1q} = \frac{L_{1q}}{\lambda_1}$ $W_{2q} = \frac{L_{2q}}{\lambda_2} \xrightarrow{L_{1q} = L_{2q} ,\ \lambda_2 = 2\lambda}$

$W_{2q} = \frac{L_{1q}}{2\lambda_1} = \frac{1}{2} W_{1q} \rightarrow W_{2q} = \frac{1}{2} W_{1q}$

$W_2 = \frac{1}{2} W_1$

۲-۱۱) الف) دقیقه $E(S) = 4$ ساعت نفر در ۱۰ $\lambda = 10$ مدل M/M/1

$\mu = \frac{1}{E(S)} = \frac{1}{4}$ نفر در هر دقیقه

Ghaem

$\mu = \lambda$ $\lambda < \mu$ ← $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ (حتماً سیستم در وضعیت یکنواخت ۱ باید باشد) یعنی

Object: Date:

M / M / 1 مثال

(۲ ـ ۱۳) ساعت $E(S) = \frac{1}{\mu}$ در هر ساعت $\lambda = \lambda$

برای هر محصول به ازای هر ساعت معطلی C_1 دلار پرداخت

$\mu = \frac{...}{...}$

μC_2 دلار هزینه دستگاه در هر ساعت

μ چقدر بزرگ باشد تا هزینه عملیات دستگاه حداقل شود

هزینه‌های پرداختی شرکت $L \times W \times C_1 + \mu C_2 \Rightarrow$

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $\quad W = \frac{1}{\mu - \lambda}$

$$\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \times \frac{1}{\mu-\lambda} \times C_1 + \mu C_2 = \frac{C_1\lambda}{(\mu-\lambda)^2} + \mu C_2$$

برای اینکه هزینه‌های پرداختی حداقل شود باید مشتقش نسبت به μ صفر شود:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{C_1\lambda}{(\mu-\lambda)^2} + \mu C_2\right) = \frac{-2C_1\lambda(\mu-\lambda)}{(\mu-\lambda)^4} + C_2 = 0$$

$$\frac{-2\lambda C_1(\mu-\lambda) + C_2(\mu-\lambda)^4}{(\mu-\lambda)^4} = 0$$ صورت باید صفر

$\mu > \lambda$ سیستم باید در وضعیت پایدار باشد یعنی

Ghaem

$\frac{dy}{dC_2}$ $y(C_2) =$

C_2 ... $= C_2\mu$

P_0 احتمال اینکه سیستم ...

Object: Date: / /

~~$E(S) = 4$ دقیقه $\lambda = 10$ در هر ساعت~~

~~$x - P_0 \times 22 = \frac{22}{3}$ ساعت انجام کار $(P_0 = \frac{1}{3})$~~ از قبل P_0 را داریم

(۱۲ ـ ۲) اتومبیل در هر روز $\lambda = 3$ عامل صنعتی M/M/1

$E(S) = \frac{7}{24}$ روز $\quad cost = 75$ دلار در روز

هزینه ثابت کارکرد تجهیزات شرکت

$\mu_1 = \frac{1}{E_1(S)} = \frac{24}{7}$ $\quad W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{7}{3}$

$L_1 = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} = 7$ $\quad \mu_2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ $\quad E(S_2) = \frac{1}{4}$

$W_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = 1$ $\quad L_2 = \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} = 3$

برای هر اتومبیل که در کارخانه بماند ۵ دلار سود از دست می‌دهد.

$L_1 \times W_1 \times 5 - W_2 \times L_2 \times 5 = 7 \times \frac{7}{3} \times 5 - 1 \times 3 \times 5 = 66.66$

اگر $75 + 66.66 <$ هزینه‌های کارکرد تغییر مقرون به صرفه خواهد بود.

Ghaem

تا ۱۰۰ هزینه نسبت تجهیزات ...

$L_q = \frac{0.176 \times 0.7 \times (1.4)^2}{2 \times (0.3)^2} = 0.158 \quad \frac{\lambda}{\mu} = 1.4$

$\frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1.4}{2} = 0.7$

Object: Date:

M/M/C مدل صف $E(S) = 28$ دقیقه (۲-۲-۲)

($\lambda = 21$ روز) پیام در هر ۷ ساعت $W_q \leq 2$ | $\boxed{C = ?}$

شرط اول برای اینکه سیستم در وضعیت یکنواخت باشد آن است که:

$P = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \Rightarrow c > \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad \lambda = \frac{21}{7} = 3$ پیام در هر ساعت

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 60\,min & 3 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \frac{3}{60} = 0.05 = \lambda$ پیام در هر دقیقه

$c > 0.05 \times 28 \stackrel{\lambda/\mu}{\Rightarrow} c > 1.4 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

تا اینجا حداقل c که صحیح باشد و از 1.4 بزرگتر باشد 2 است.

$W_q \leq 2 \Rightarrow \frac{L_q}{\lambda} \leq 2 \quad (\frac{\lambda}{\mu} = 1.4)$

برای مدل M/M/C که $c \leq 2$

$P_0 = \frac{1}{\left[\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right) + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]}$

سه فرمول مشتق $L_q = \cancel{\frac{P^{c+1} \times c^c}{c!(1-P)^2}} P_0 \qquad L_q = \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^c P}{c!(1-P)^2}$

Ghaem

$W_q < 2$ M/M/K

از قسمت بالا c رو در بیاره چند مقدار رو توی فرمولات M/M/C با c در دو ورده بیش از حاصل میشه با ...

(۲)

Object: Date: / /

بررسی

M/M/C مدل صف $C = 23$ (۲-۲۱)

?

$E(S) = 3$ هفته $\quad E(S) = 3/$ سال $\quad 52$

$E(S) = 3 \times 7 = 21$ روز $\quad \mu = \frac{1}{21}$ $\quad P = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{\lambda}{\frac{23}{21}}$

$\lambda = 347 \quad \frac{347}{365} = 0.95$ روز اعتیادات پشتیبانی در سال

$W = ? \quad W = W_q + E(S) \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

$L_q = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c \times \lambda\mu}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2}\right] P_0$

Ghaem $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1}$

Object: $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{3}{2\times 2/1} = \frac{3}{4/2} = 0/7$ Date: / /

$$\frac{\rho^{c+1} \times c^{c}}{c!\,(1-\rho)^2} \times \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(1/4)^n}{n!} + \frac{(1/4)^c}{c!} \times \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

0.05

$$C=2 \Rightarrow P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(1/4)^n}{n!} + \frac{(1/4)^2}{2!} \times \frac{1}{1-\frac{1/4}{2}}\right]^{-1}$$

$$= [1 + 1/4 + 0.98 \times 3.3]^{-1} = [5.66]^{-1} = 0.176$$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0/108}{...} = 0/05$

$$L_q = \frac{(0.7)^3 \times 2^2}{2!\,(0.3)^2} = 7.6 \times P_0 \quad W_q = 26/83 \text{ دقیقه}$$

ساعت ۲ > ...

محاسبات این را بپرسم

بیشتر بود به جای دقیقه از ساعت استفاده می‌کردم

$C = 2$

آزمون ۲ و ۳ W_q -> کمتر از ۲ می‌آید و همان $c=2$ کفایت می‌کند

حداقل c ای که W_q ۲ کمتر می‌شود ۲ است

$P\{q > 3\} < 0.05$

$P\{q>3\} = 1 - P\{q \le 3\} < 0.05 \Rightarrow$

$P(q \le 3) > 0.95$

Ghaem

$(1/4)^2 \; 2/1 \; (2/74) \; e^{-(4/2-3)3} \times 0.176$

Object: 37.5 Date: ۱۴۰۹۷

$W_q(t) = P(t < 3) > 0.95 \Rightarrow$

$$W_q(t) = \frac{(\lambda/\mu)^c \mu e^{-(\mu c - \lambda)t}}{(c-1)!} P_0 > 0.95 \Rightarrow$$

$$\frac{(1/4)^c \times 1/28 \times e^{-(6/28 - 0.05)3} \times 0.176}{(c-1)!} > 0.95$$

$C = 2 \Rightarrow 0.0119 > 0.95$ حتما بپرسم

در حالت اول دو ماشین M/M/1 داریم که ۲۲-۲۳

$\lambda_1 = \lambda_2 = 20$ نفر در هر ساعت $E(s_1) = E(s_2) = 2$ دقیقه

در حالت دوم یک صف M/M/2 داریم که

$\lambda = 40$ نفر در هر ساعت $E(s) = 2.4$ دقیقه

در سیستم زمانی موارد مقایسه شوند: تعداد کل افراد در بانک، زمانی که هر فرد به طور متوسط در بانک باید صرف کند

Ghaem

$$L_q = \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^c \rho}{c!(1-\rho)^2} = \frac{0/11 \times (1/6)^2 \times 0/8}{2!\,(0/2)^2} = 1/1$$

Object: Date: ۱/۵/۱

$P_0 = 1 - \rho = 0/33 = 1/3$ $\quad 1/3 \times 100 = 33/3\%$ اوقات بیکاری هر باجه

حالت دوم: $\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ نفر در هر دقیقه

$E(S) = 2/4$ دقیقه $\quad \mu = \frac{1}{E(S)} = \frac{1}{2/4}$ نفر در هر دقیقه

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{2/3}{\frac{2}{2/4}} = \frac{2/4}{3} = 0/8$

$L = \lambda W \quad W = W_q + E(S) \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

$L_q = \frac{\rho^{c+1} \times c^c}{c!(1-\rho)^2} P_0 \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$

$P_0 = \left[1 + 1/6 + \frac{(1/6)^2}{2} \times \frac{1}{0/2}\right]^{-1} = 1/9 = 0/11$

$L_q = \frac{(0/8)^3 \times 4}{2(0/2)^2} \times 1/9 = 2/85$ نفر $\quad W_q = \frac{2/85}{2/3} = 4/27$ دقیقه

$W = 4/27 + 2/4 = 6/67$ دقیقه $\quad L = \lambda W = 1/3 \times 6/67$

$L = 4/4$ نفر $\quad P(q > 5) = 1 - P(q \le 5)$

Ghaem

بپرسیم W_q یا W

Object: min Date: / /

زمان بیکاری توسط متصدیان باجه $\quad P(q > 5)$

در حالت اول موارد را مقایسه با یک صف بررسی می کنیم زیرا صف دقیقاً مشابه همین صف است.

$\lambda_1 = 20 \quad \lambda = \frac{20}{60} = 1/3$ نفر هر دقیقه

$E(S_1) = 2$ دقیقه $\quad \mu = \frac{1}{2}$ نفر هر دقیقه

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1/3}{1/2 - 1/3} = \frac{1/3}{1/6} = 2$ فرمول هر صف با باجه

$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1/2 - 1/3} = \frac{1}{1/6} = 6$ دقیقه

$L = 2 \times 2 = 4$ تعداد کل افراد در بانک

$P(q > 5) = 1 - P(q \le 5) = 1 - 1 + \rho e^{-t/w}$

$P(q > 5) = \rho e^{-5/6} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$

Ghaem $\quad P(q > 5) = \frac{2}{3} e^{-5/6} = 0/28$

Object: Date: ۱۵۳/

الف) L_1 و L_2

ب) W_1 و W_2

پ) به ازای هر دقیقه معطلی در کارگاه ۲ دلار کم می‌شود

و هزینه عملیاتی نوع اول یک دلار در هر دقیقه این هزینه برای

نوع دوم چقدر باشد تا اختلافی بین دو کارگاه موجود نباشد.

در نوع اول: $L_1 = \lambda W_1 \qquad W_1 = W_{q_1} + E(S_1)$

تاکسی نرم

$W_{q} = \frac{L_q}{\lambda} \qquad L_q = \frac{\cancel{\rho^{c+1}} \cancel{c^c}\, P_0 \times (\frac{\lambda}{\mu})^c \times \rho}{c!(1-\rho)^2}$

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1}{40} \times 30 \times \frac{1}{2} = 0/375 \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{40} \times 30 = 0/75$

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \times \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$

$P_0 = \left[1 + 0/75 + \frac{(0/75)^2}{2} \times \frac{1}{1-0/37} \right]^{-1} = 0/45$

$L_q = \frac{(0/37)^3 \times 4}{2!(1-0/37)^2} \times 0/45 = 0/11$ ماشین

$L_q = \frac{0/45 \times (0/75)^2 \times 0/375}{2!(1-0/375)^2} = 0/121$

Ghaem

توجه: اگر زمان بیکاری برای

هر ل از $M/M/c$ خواست $\leftarrow P_0$

از فرمول $M/M/c \leftarrow 1-\frac{\lambda}{c\mu}$

Object: Date: / /

فرمول
حالا
تکرار کنیم

$P(q>5) = 1 - \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c \mu e^{-(\mu c - \lambda)t}}{(c-1)!} P_0$

$P(q>5) = 1 - (1/6)^2 \times 0/41 e^{-(0/61 \times 2 - 0/6)5} \frac{1}{9}$

$P(q>5) = 0/96$ محاسبه کردیم

جوابم با ... تابی بیاید

یعنی از ۲ تا سه ره

چه تا از ۲ متقاضی سفارش

$\frac{2}{2} P_0 + 1/2 P_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times 1/6 \times \frac{1}{9}$ زمان بیکاری متوسط متقاضیان با هم

احتمال بیکار بودن یک سرویس دهنده خاص در زمان خودش $= 0/2$ روش اول

(هر سرویس دهنده به تنهایی) $P_1 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^1}{1!} P_0 = 1/6 \times \frac{1}{9}$

$1 - \frac{\lambda}{c\mu} = 1 - 0/8 = 0/2$ روش دوم

۲-۲۴)

ماشین در هر دقیقه $\lambda = \frac{1}{40}$

نوع اول کارگاه:

$M/M/2 \qquad E(S_1) = 30$ دقیقه

نوع دوم: $M/M/1 \qquad E(S_2) = 15$ دقیقه

Ghaem

فرمول هزینه از دست رفته ⟵ $L \times W \times$ هزینه

$LWC_1 + WC_2 \rightarrow cost$

Object: | **Date:** ۵۵/

(۲_۲۵) طرح ۱ دلار ۱۵۰۰۰ — هزینه سالانه: $M/M/2$

$E(S_1) = 6$ ساعت

طرح ۲: دلار ۲۰۰۰۰۰ — هزینه سالانه $M/M/1$

$E(S_2) = 3$ ساعت

λ هر دو $= 1/8$ در هر ساعت

به ازای هر ساعت انتظار هر ماشین در سیستم ۳۰ دلار از دست می‌رود

کدام طرح به صرفه است؟ از لحاظ هزینه کمتر

$\boxed{\text{طرح ۱: } W_1 \times L_1 \times 30 \text{ هزینه از دست رفته در طرح ۱}}$

$L_1 = \lambda W_1 \qquad W_1 = W_{1q} + E(S_1)$

کاملاً

$W_{1q} = \frac{L_{1q}}{\lambda} \qquad L_{1q} = \frac{\rho^{c+1} \times c^c \, P_0 \times (\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1-\rho)^2}$

$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}$

Ghaem $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 1/8 \times 6 \times 1/2 = 3/8 = 0/37$

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/8}{1/6} = 6/8 = \frac{3}{4}$

Object: | **Date:** / /

$W_{1q} = \frac{0/121}{1/40} = 4/84$ دقیقه

$4/84 + 30 = 34/8$

$W_1 = 4/58 + 30 = 34/58$ دقیقه

$L_1 = 34/58 \times 1/40 = 0/86$ کاملاً

$1/40 \times 34/8 = 0/87$

در نوع دوم

$\rho_2 = \lambda E(S_2) = \frac{1}{40} \times 15 = 0/37$

$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0/37}{0/62} = 0/59$ کامیون $\qquad W_2 = \frac{E(S_2)}{1-\rho} = \frac{15}{0/6}$

$= 24/19$ دقیقه

ب)

سود از دست رفته در نوع اول $2 \times W_1 \times L_1 = 2 \times 34/58 \times 0/1$

سود از دست رفته در نوع دوم $2 \times W_2 \times L_2 = 2 \times 24/19 \times 0/5$

$= 28/54$ دلار

$= 59/47$ دلار

$+ W_1 C_1$

$2 \times W_1 \times L_1 + W_1 \times 2 = 2 \times W_2 \times L_2 + W_2 \times x$ (ج)

Ghaem $\Rightarrow 59/47 + 34/58 = 28/54 + 24/19x$

$x = 1/78$ دلار

$\frac{4}{1\text{ ساعت}} \times \frac{1}{60}$

Object: Date: ۱۵/۷/

M/M/1/3 تبدیل صف ۱۱۴۵ نکات کلی (۲.۳۱)

$\lambda = 4$ در هر ساعت $E(S) = 15$ دقیقه

$$P[q > 20] = 1 - P[q \leq 20]$$

$$\begin{pmatrix} 60 \text{ دقیقه} & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$ در هر دقیقه

$$\boxed{W_q(t) = 1 - \sum_{n=c}^{k-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(\mu c t)^i e^{-\mu c t}}{i!}}$$

$q_n =$ $\boxed{q_n = \frac{P_n}{1-P_k}}$ $n \leq k-1$

$\lambda = \frac{1}{15}$ $\mu = \frac{1}{15}$ $\Rightarrow \lambda = \mu \Rightarrow \rho = 1$

$$P_n = P_k = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow q_n = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$$W_q(20) = 1 - \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1/15 \times 1 \times 20)^i e^{-20/15}}{i!}$$

$$W_q(20) = 1 - \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1.33)^i \times 0.127}{i!}$$

$n=1$ $n=2$

$q_n = \frac{P_n}{1-P_k}$ $n=0$ $n=1$ $n=2$ $P = \frac{1}{k+1}$

Object: Date: / /

$$P_0 = \left[1 + (0.175) + \frac{(0.175)^2}{21} \times \frac{1}{1 - 0.37}\right]^{-1} = 0.45$$

$$L_q = \frac{(0.37)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2}{2(1-0.37)^2} \times 0.45 = 0.1154 / 0.18$$

$W_q = 0.11 \times 8 = 0.88$ (0.191 دقیقه)

$W_1 = 0.191 + 6 = 6.91$ ساعت

$L_1 = 1/8 \times 6.91 = 0.86$ $\times 24 \times 365$ پس می‌خواهیم از خواست‌ها آخر درست کنم

هزینه از دست رفته در طرح ۱ $6.91 \times 0.86 \times 30 = 179.55$

کل هزینه مصرفی در طرح ۱ $= 179.55 + 150000 = 150179.5$

طرح ۲:

$W_2 = \frac{L_2}{\lambda}$, $L_2 = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1/8}{1/3 - 1/8} = \frac{1/8}{5/24}$

$L_2 = \frac{3}{5} = 0.6$ $W_2 = \frac{0.6}{1/8} = 4.8$

$\boxed{\text{هزینه از دست رفته در طرح ۲} = W_2 \times L_2 \times 30} = 4.8 \times 0.6 \times 30$ $\times 24 \times 365$

$= 86.4$

کل هزینه مصرفی در طرح ۲ $= 86.4 + 200000 = 200086.4$

پس طرح ۱ چون هزینه کمتری دارد به صرفه‌تر است

از فرمول‌های در کتاب هم می‌توان استفاده کرد

Object: Date: / ۵۹ /

مسائل صفحه ۱۸۷ کتاب درسی

$M/M/1/10$ مدل (۲-۳۲): وارد شد

$\lambda = 20$ اتومبیل در ساعت $E(S) = 12$ دقیقه

باید در صف نشود

تعداد متوسط اتومبیل‌هایی که به خاطر محدودیت ظرفیت در هر روز و ۱۰ ساعت

نمی‌توانند وارد شوند P = احتمال اینکه ۱۰ اتومبیل در سیستم باشد $\Leftarrow P(10)$

روش اول $\lambda P(k)$, $E(S) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ ساعت

$\Rightarrow \mu = 5$ اتومبیل در هر ساعت

$$P_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}}$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow P(k) = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{k+1}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$$

$n \le K$

$$\Rightarrow P(10) = \frac{-3\times 4^{10}}{1-4^{11}} = \frac{3145728}{4194303} = 0.75$$

تعداد آنهایی که نمی‌توانند وارد شوند در ۱ ساعت $20 \times 0.75 = 15$

تعداد آنهایی که در ۱۰ ساعت نمی‌توانند وارد شوند $15 \times 10 = 150$

روش دوم: $\boxed{\lambda - \lambda\alpha}$ $\lambda\alpha = \lambda(1 - P(k)) = 20(1 - 0.75) = 5$

میانگین نرخ ورودی

تعداد آنهایی که نمی‌توانند وارد شوند

تعداد کل ورودی

$\lambda - \lambda\alpha = 20 - 5 = 15$

$15 \times 10 = 150$

Ghaem

Object: Date: / /

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{0} \frac{(1/3)^0 \times 0.27}{0!}\right] = \frac{1}{3}\times 0.27 = 0.09$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{1} \frac{(1/3)^i \times 0.27}{i!}\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(1/3)^0 \times 0.27}{0!} + \frac{1/3 \times 0.27}{1}\right] = 0.09 + 0.117$$

$$W_q(20) = 1 - [0.09 + 0.09 + 0.117] = 0.703$$

$$P\{q > 20\} = 1 - 0.703 = 0.29$$

$\frac{15}{20} , \frac{3}{4}$

Ghaem

~~گ م ۲ صد ۹۱ ~~ گذارش

(۲۰)

از نوشته های کتاب استفاده کنم

Object: Date: / /

۳۳-۲) باید ببینیم سودی که از اجاره بدست می آورد از اجاره ای که می پردازد بیشتر است یا نمی ارزد یا نه ولی این منظور باید ببینیم وقتی ظرفیت آرایشگاه را افزایش می دهد چه تعداد مشتری اضافه آید و سود این مشتری های اضافه را می سنجیم اگر این سود بیشتر از اجاره بیشتر بود می ارزد.

فقط معادله خواص

۴ نوشته و اندازه [illegible]

نقطه ۴ $k=5$: مدل فعلی $M/M/1/k$

نفر می تواند بنشیند

$\lambda = 5$ نفر ساعت $E(S) = 10$ دقیقه $\mu = 6$ ساعت

$$M/M/1 \quad (9) \quad L_2 = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{[k+1]\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

سه از صندلی ها ۶ نفر جای نشستن دارند ۴ نفر هم [illegible]

$$L_2 = \frac{5/6}{1/6} - \frac{(9+1)(5/6)^{10}}{1-(5/6)^{10}} = 5 - 1/9 = 3/1$$

$M/M/1/5$

$$L_1 = 5 - \frac{6 \times (5/6)^6}{1-(5/6)^6} = 2/48$$

$(L_2 - L_1) \times 2/25 = 1/42 <$ ۴ به صرفه نیست

Ghaem

(۲۱)

Object: Date:

۳۴-۲) چون ظرفیت سیستم محدود و برابر ۶ [illegible] می باشد

پس مدل صف: $M/M/1/2/6$

ساعت $E(S) = 10$ تانک در هر ساعت $\frac{1}{2} = \lambda$

الف) $L = ?$ ب) $P_0 = ?$ ج) $\boxed{\lambda - \lambda_e = \lambda P_k}$ نرخ ورود موثر

X دلار هزینه نگهداری هر تانکر دیگر در سال

y دلار هزینه جابجایی به بندر نشانور

باید سودی که در یک ساعت بدست می آوریم از هزینه نگهداری یک ساعت بیشتر باشد برای بدست آوردن سود باید کسب کنیم چه تعداد تانک دیگر به بندر نشانور می روند و در y ضرب کنیم از طرفی X هزینه نگهداری در یک سال است، در یک ساعت را بدست می آوریم

$$\text{۱۱۷ ص} \quad L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!} \qquad \text{(الف)}$$

$$c = 4 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 1/3 \times 10 \times 1/4 = \frac{5}{4} = 1/25 \qquad \frac{\lambda}{\mu} = 5$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \sum_{n=c+1}^{N} (\rho)^{n-c}\right]^{-1}$$

Ghaem

نرخ ورود موثر

کسانی که نتوانسته اند وارد سیستم شوند

چون سیستم دارد سود بدست آمده ورود

Object: Date: / /

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{4} \frac{5^n}{n!} + \frac{5^4}{4!} \sum_{n=5}^{6} (1.25)^{n-4}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^4}{4!}\left((1.25) + (1.25)^2\right)\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[6 + 12.5 + 20.84 + 26.04 + 26.04(2.81)\right]^{-1}$$

$$(138.5)^{-1}$$

$P_0 = 0.0072$ جواب که درست می آورم به آخرش دقت کنم

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\left[1 - \rho^{N-c} - (N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right]$$

$$= \frac{0.0072 \times 5^4 \times 1.25}{4!(1-1.25)^2}\left[1 - (1.25)^2 - (2)(1.25)^2(1-1.25)\right]$$

$$= 3.64(1 - 1.56 + 0.78) = 3.64 \times 0.21 = 0.79$$ تانک

$\boxed{L_q = 0.79}$

$$L = 0.79 + 4 - 0.0072 \sum_{n=0}^{3} \frac{(4-n)(1.25 \times 4)^n}{n!}$$

Ghaem ص ۱۱۷

Object: Date:

$$L = 4.79 - 0.0072\left(4 + 3\times5 + \frac{2\times25}{2} + \frac{125}{6}\right) = 4.33$$ مشتری

تانک

ب) $\lambda' = \lambda(1 - P_k) = \frac{1}{2}(1 - 0.28) = 0.36$ $\quad W = \frac{L}{\lambda'}$

$$P_6 = P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{c!\,c^{k-c}} P_0 \qquad P_6 = \frac{5^6}{4!\,4^2} \times 0.0072 = 0.28$$

$$W = \frac{4.33}{0.36} = 12.10$$ ساعت

د) نرخ ورود به مشاور $\lambda P_k = \lambda P_6 = \frac{1}{2} \times 0.28 = 0.14$

ج) اگر یک محل تخلیه دیگر اضافه شود مدل صف M/M/4/7

می شود: $P_7 = \frac{(\lambda/\mu)^7}{c!\,c^{7-c}} P_0$ $\quad \lambda P_7 =$ نرخ ورود به مشاور در این مدل

$$P_7 = \frac{5^7}{4!\,4^3} P_0 = 0.25 \qquad \frac{1}{2} \times 0.25 = 0.12$$

Ghaem $\lambda P_6 - \lambda P_7 = 0.14 - 0.12 = 0.02$ نرخ اضافی که دیگر به مشاور نمی روند

$(\lambda P_6 - \lambda P_7) \times y = 0.02\,y$ سودی که در هر ساعت به دست می آید

باشه احتمال بین ۰ و ۱ است از ابزارهای ... می شود

Object: Date:

ضریب موردهای صف ۱۱۴ کتاب ...

هزینه ۷۰ دلار برای هر تلفن می پردازد

زیان روزانه ناشی از محدودیت امکانات سرویس؟

$P_k = P_3 = \frac{(\lambda/\mu)^3}{C!\,C^{3-C}} P_0 \qquad \rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{20}{30} = 2/3 = 0.66$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{C} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} \sum_{n=C+1}^{N} \rho^{n-C}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{(20/10)^n}{n!} + \frac{(20/10)^3}{3!} \underbrace{\sum_{n=4}^{3} (0.66)^{n-3}}_{\text{به سیستم ۳ است}}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right]^{-1} = 0.15$$

$P_3 = \frac{2^3}{3!} \times 0.15 = 0.2$ — نرخ آنهایی که موفق به برقراری تماس نمی شوند $= \lambda P_3$

$20 \times 0.2 = 4$ نفر در هر ساعت

$\frac{60}{100} \times 4 = 2/4$ آنهایی که از شرکت هواپیمایی دیگری استفاده می کنند

زیان: $3 \times 2/4 \times 70 = 504$ دلار — سودی که در ۳ ساعت برای آنهایی که از شرکت هواپیمایی دیگری استفاده می کنند، از دست می رود.

Ghaem

Object: Date: / /

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{4} \frac{5^n}{n!} + \frac{5^4}{4!} \sum_{n=5}^{7} (1.25)^{n-4}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 64.38 + 26.04(2.81 + 1.95)\right]^{-1}$$

$P_0 = 0.0051$

$\frac{x\ \text{دلار در سال}}{365 \times 24}$

۸۷۶۰ ساعت — x هزینه

۱ ساعت — هزینه نگهداری در یک ساعت $= \frac{x}{8760}$

$(\lambda P_6 - \lambda P_7)\, y > \frac{x}{8760} \Rightarrow 0.502\, y > \frac{x}{8760}$

۳۵-۲) چون گفته اگر همه سرویس دهندگان مشغول باشند نمی توان تماس گیرندگان را نگه داشت — مدل $M/M/3/3$ (حد ظرفیت سیستم)

۳ ساعت از ۲۴ ساعت ساعات اوج است. $c = 3$

۶۰ درصد تماس گیرندگان از شرکت هواپیمایی دیگری استفاده می کنند.

$\boxed{\lambda = 20}$ تماس در ساعت $\quad E(S) = 6$ (دقیقه)

Ghaem

$E(S) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ ساعت

$\mu = 10 \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{10} = 2$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ زمان رفع عیب $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$ روز

(۲۷)

Object: Date: ۱۷/

(مدل تعمیرهای ماشین آلات) (۲-۲۳) جمعیت مشتری محدود ۵ تا است.

مدل اول: $C=3 \quad M/M/3/5/5$

روز $\lambda = 1$ یک خرابی در روز $E(S) = 1/2$

مدل دوم: $C=1 \quad M/M/1/5/5$

روز $\lambda = 1$ در روز $E(S) = 1/6$

$L_1 = ? \quad L_2 = ? \quad W_1 = ? \quad W_2 = ?$

مدل اول: $\lambda/\mu = 1 \times 1/2 = .5$

مرجع صفحه ۱۲۶ کتاب ۶۱ p

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} n \frac{N!}{(N-n)!n!} (\lambda/\mu)^n + \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{N} n \frac{N!}{(N-n)!\, c^{n-c}} (\lambda/\mu)^n \right]$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} (\lambda/\mu)^n + \sum_{n=c}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}\,c!} (\lambda/\mu)^n \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{5!}{(5-n)!\,n!} (.5)^n + \sum_{n=3}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\,3^{n-3}\,3!} (.5)^n \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{5!}{4!} (.5)^1 + \frac{5!}{3!\,2!} (.5)^2 + \frac{5!}{2!\,3!} (.5)^3 + \right.$$

Ghaem

قائم نژاد

$$\left. \frac{5!}{3 \times 3!} (.5)^4 + \frac{5!}{3^2\,3!} (.5)^5 \right]^{-1} =$$

(۲۶)

دنباله ی حل مسئله جرم و جوش هسیم

Object: دستمزد متقاضی در هر ساعت Date: / /

حجم شیفت کاری

$C \times 8 \times 8 = 3 \times 16 \times 8 \times P_3 \times 70 = 502$

تعداد تعمیرکاران اضافی $\Rightarrow C = \frac{502}{64} = 7.8 \simeq 8$

که باید استخدام کرد.

یعنی هزینه ای که از دست می رود صرف داشتن سرویس دهنده ها بیشتر می شود که آن زیان را از دست ندهیم ولی به جایش می شود حقوق کارمندان.

(۲-۳۷) چون دوره به صورت خودآموز است یعنی هرکسی خودش خودش را سرویس می دهد و سرویس دهنده ی خودش است پس

مدل $M/M/\infty \quad \lambda = 8$ نفر در ماه

$E(S) = 15$ هفته $L = ?$

$\left(\frac{8 \text{ نفر}}{4 \text{ هفته}} \right) \left(\frac{\lambda}{1 \text{ هفته}} \right) \Rightarrow \lambda = 8/4 = 2$ نفر در هفته

هنرآموز $\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu}} = 2 \times 15 = 30$

Ghaem

۱ ماه = ۴ هفته

برای مدل $M/M/\infty$

(۲۸)

Object: Date: / /

$\{1+2.5+2.5+1.25+0.41+0.069\}^{-1} = 0.129$

$L_1 = 0.12\left[\sum_{n=0}^{2} n \frac{5!}{(5-n)!\,n!}(0.5)^n + \frac{1}{2!}\sum_{n=3}^{5} n \frac{5!}{(5-n)!}\frac{n!}{2^{n-2}}(0.5)^n\right]$

$L_1 = 0.12\left[\frac{5!}{4!}(0.5) + 2\times\frac{5!}{3!\,2!}(0.5)^2 + \frac{1}{6}\left(3\,\frac{5!}{2!}\,\frac{3!}{2}(0.5)^3\right.\right.$

$\left.\left. + 4\,\frac{5!}{1}\,\frac{4!}{3}(0.5)^4 + 5\times 5!\times\frac{5!}{9}(0.5)^5\right)\right]$

اشتباه $\to 2.11$

$L_1 = 0.12[2.5+5+3.75+1.64+0.345] = 13.4$ جواب

حکم بپرسم

$W_1 = \frac{L}{\lambda_e}$ $\lambda_e = \lambda(N-L) = 1(5-13.4) = -8.4$ 2.89

$W_1 = \frac{13.4}{-8.4} = -1.59$ $W_1 = \frac{2.11}{2.85}$

مدل دوم:

$L_2 = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$ $\lambda = 1$ $\mu = 6$ (ب)

$P_0 = \left[1+\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\left(\lambda/\mu\right)^n\right]^{-1}$

Ghaem

مدل $M/M/1/5/5$

(۲۹)

Object: Date: ۱/۶/۹۷

$P_0 = \left[1+\sum_{n=0}^{5}\frac{5!}{(5-n)!}(1/6)^n\right]^{-1} = \left[1 + \frac{5!}{4!}\times 1/6 + \frac{5!}{3!}(1/6)^2 + \frac{5!}{2!}(1/6)^3 + 5!(1/6)^4 + 5!(1/6)^5\right]^{-1}$

$= [1+0.84+0.555+0.28+0.09+0.01]^{-1} = 0.27$

$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$

$L_2 = 5 - 6(1-0.27) = 0.62$ خرابی

$W_2 = \frac{L_2}{\lambda_e}$ $\lambda_e = \lambda(N-L) = 1(5-1.21) = 3.78$

$W_2 = \frac{0.62}{3.78} = 0.14$ $W_2 < W_1$ این بهتره

$\boxed{\lambda = \frac{1}{10}}$ یک نفر ۱۰ ساعت $c=2$ (۴۴-۲)

$M/M/2/5/5$ $E(s) = 5$ ساعت

Ghaem

وقتی گفته شود به طور متوسط یکی در هر ۱۰ ساعت از کار بیفتد

یعنی λ ← نرخ ورود برای تعمیر

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/10}{1/5} = \frac{1}{2}$

Object: Date: / / /

احتمال اینکه یک ماشین در حوزه سیستم باشد یعنی اینکه ۴ تا ماشین

الف) در سیستم باشند برای تعمیر.

$P(4) = R_4 P_0$

$R_4 = \frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{5!}{(5-4)!\,2^2\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$= 0.93 \qquad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}\,c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{5!}{(5-n)!\,n!}(0.5)^n + \sum_{n=2}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\,2^{n-2}\,2!}(0.5)^n\right]^{-1}$

$P_0 = \Big[\overset{n=0}{1} + \overset{n=1}{\frac{5!}{4!}(0.5)} + \frac{5!}{3!\,2!}(0.5)^2 + \frac{5!}{2!\,2\,2!}(0.5)^3 +$

$\frac{5!}{2^2\,2!}(0.5)^4 + \frac{5!}{2^3\,2!}(0.5)^5\Big]^{-1} = [1 + 2.5 + 2.5 +$

$1.87 + 0.93 + 0.23]^{-1} = 0.11$

$P(4) = \overset{R_4}{0.93} \times \overset{P_0}{0.11} = 0.10$

ب) $\frac{W}{E(S)} \qquad W = \frac{L}{\lambda_e} \qquad \lambda_e = \lambda(N - L)$

$= \frac{1}{10}(5 - L)$

Ghaem

کارایی کارگر $=$ متوسط زمان انتظار / متوسط زمان سرویس $= \frac{W}{E(S)}$

Object: Date:

$L = P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{N} n\frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$

$L = 0.11\left[\sum_{n=0}^{1} n\frac{5!}{(5-n)!\,n!}(0.5)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{5} n\frac{5!}{(5-n)!\,2^{n-2}}(0.5)^n\right]$

$L = 0.11\Big[\frac{5!}{4!}(0.5) + \frac{1}{2}\Big(2\frac{5!}{3!}\,2!\,(0.5)^2 + 3\frac{5!}{2!}\,\frac{2!}{2}(0.5)^3$

$+ 4\,5!\,\frac{4!}{4}(0.5)^4 + 5\,5!\,\frac{5!}{8}(0.5)^5\Big)\Big] \Rightarrow$

$L = 0.11\left[2.5 + \frac{1}{2}(20 + 67.5 + 180 + 281.25)\right] \Rightarrow$

$L = 30.45$ اگر درست بود W و سپس $\frac{W}{E(S)}$ را بدست آوردم. بپرسم؟

$E(S) = 5$

ب) $N = 6 \qquad P(5) = R_5 P_0$

بقیه را بدست می‌آوریم

۲-۴۶) با قبل ۵-۲ حل کنم صفحه بعد

Ghaem

Object: Date: / /

صفحه ۱۳۲

سوال ۵ ... چون جمعیت مشتری محدود است ... می شود

$c=2$

$M/M/2/5/5$ $E(t)=30$ ساعت $E(s)=3$ ساعت

متوسط زمان تعمیر

$L=?$ $L_q=?$ $W=?$ $P_0+\frac{1}{2}P_1$

$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0.1$ $\mu E(t)=\frac{30}{3}=10=\frac{\mu}{\lambda}$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=c}^{N}\frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{1}\frac{5!}{(5-n)!\,n!}(0.1)^n+\sum_{n=2}^{5}\frac{5!}{(5-n)!\,2^{n-2}2!}(0.1)^n\right]$$

$$P_0=\left[1+0.5+\frac{5!}{3!2!}(0.1)^2+\frac{5!}{2!\,2\,2!}(0.1)^3+\frac{5!}{2^2 2!}(0.1)^4+\frac{5!}{2^3 2!}(0.1)^5\right]^{-1}=0.62$$

$$L=P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} n\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{N} n\frac{N!}{(N-n)!\,c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

ادامه با استفاده از کتاب صفحه ۱۳۳

Ghaem

Object: Date:

W_q $W=\frac{L}{\lambda_\alpha}$ $\lambda_\alpha=\lambda(N-L)=\lambda(5-L)$

$=\frac{1}{30}(5-L)$

$P_0+\frac{1}{2}P_1$

$P_1=R_1P_0$ $R_1=\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$

$R_1=\frac{5!}{(5-1)!}(0.1)=5\times0.1=0.5$

$P_1=0.5\times0.62=0.31$ $0.62+\frac{1}{2}\times0.31=0.78$

$M/M/1/5/5$ مثال صفحه

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}=\left[1+\frac{5!}{4!}(0.1)+\frac{5!}{3!}(0.1)^2+\frac{5!}{2!}(0.1)^3+5!(0.1)^4+5!(0.1)^5\right]^{-1}=$$

$$\boxed{[1+0.5+0.2+0.06+0.012+0.0012]^{-1}=0.56}$$

$$\boxed{L=N-\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)=5-10(1-0.56)=0.63}$$

$5-0.63=4.36$ $W=\frac{L}{\lambda_\alpha}$ $\boxed{\lambda_\alpha=\lambda(N-L)}$

$\frac{1}{30}\times4.36=0.14$

$W=\frac{0.63}{0.14}=4.33$

Ghaem

$$\boxed{W=\frac{L}{\lambda_\alpha}}$$

$P_n = \rho^n P_0 = (1-\rho)\rho^n$

Object: Date:

$\rho = \lambda E(s) = 5/6 \quad L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5/6}{1/6} = 5$

$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{25/36}{1/6} = 25/6 = 4.16 \quad P_0 = 1-\rho$

$P_0 = 0.16 \times 100 = 16.7\%$

ثمرهای انجام این محاسبات است که می‌توانیم تعداد را تعیین کنیم

$P_r\{N \geq 5\} = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 1 - P_0 \ldots$

$\rho^1 P_0 + \rho^2 P_0 + \rho^3 P_0 + \rho^4 P_0) = 1 - P_0(1 + \rho^1 + \rho^2$

$\rho^3 + \rho^4) = 1 - 0.16(1 + 0.83 + (0.83)^2 + (0.83)^3$

$+ (0.83)^4) = 1 - 0.16(1 + 0.83 + 0.68 + 0.57 + 0.47)$

$= 0.43$

مثال (۲-۲) صفحه ۱۱۲ مدل M/M/C

$C = 3 \quad E(s) = 20$ دقیقه $\lambda = 6$ نفر در ساعت

$L_q = ? \quad W = ? \quad \frac{\lambda}{c\mu} \quad P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$

Ghaem $E(s) = \frac{20}{60} = 1/3$ ساعت $\frac{\lambda}{\mu} = 6/3 = 2$

Object: وقتی تعداد مشتری‌ها نامحدود است. Date: / /

مدل M/M/C $\quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

تمرین (۲-۴) $\quad M/M/2 \quad L = ?$

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 1/30 \times 1/2 \times 3 = 1/20$

$P_0 = \left[1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} \times \frac{1}{1 - 1/20}\right]^{-1} = 0.90$

وجود نداشتن

$L_q = \frac{\rho^{c+1} c^c}{c!(1-\rho)^2} P_0 = \frac{(0.05)^3\, 3^3}{3!(0.95)^2} \times 0.9 = 0.0000$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.0005 \times 30 = 0.015 \quad W = W_q + E(s)$

$W = 0.015 + 3 = 3.015 \quad L = \lambda W = 1/30 \times 3.015 = 0.10$

مثال (۲-۱) صفحه ۹۶

$\lambda = 5$ نفر در ساعت $E(s) = 10$ دقیقه M/M/1

$L = ? \quad L_q = ? \quad E(s) = \frac{10}{60} = 1/6$ ساعت

Ghaem $\mu = 6$ ساعت

(٤٧)

Object: Date:

M/M/3/7 $\quad \lambda/\mu = 6 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 6/3$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \sum_{n=c+1}^{N} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^3}{3!} \times (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)\right]^{-1}$$

$$P_0 = \frac{1}{1141} = 0.00088$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\left(1 - \rho^{N-c} - (N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)\right)$$

$$L_q = \frac{0.00088(6)^3\, 2}{3!}\left(1 - 2^4 - (4)2^4(1-1)\right) = 3.09$$ اتومبیل

$$L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!}$$

$$L = 3.09 + 3 - 0.00088\left(3 + 2\times 6 + \frac{6^2}{2}\right) = 6.06$$

$W = L/\lambda' \quad \lambda' = \lambda(1 - P_k) = 1\times(1 - 0.5) \quad W = \frac{6.06}{0.5} = 12.3$ دقیقه

Ghaem

(٤٦)

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

Object: $c-1=$ Date: / /

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 2/3 \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$

$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{40}{4\times 15} = \frac{2}{3}$

$$P_0 = \left[1 + 2 + 2 + \frac{2^3}{6} \times 3\right]^{-1} = 1/9$$

$L_q = \frac{0.06\,(8/3)^4\, 2/3}{4!\,(1-2/3)^2} = 0.76$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1} c^c P_0}{c!(1-\rho)^2} = \frac{0.19 \times 27}{0.66} = 0.85$$

فرمول بنویسیم و جایگذاری مال کتاب را بنویسیم ساعت 0.19

$\frac{L_q}{\lambda} = W_q = \frac{0.76}{40} = 0.14$ (0.88 و 4 خط خورده)

$W = W_q + E(S) = 0.14 + 1/3 = 0.47$ ($E(S)=1/\mu$؛ بالای آن: $0.19 +$)

$L = \lambda W = \lambda(W_q + \frac{1}{\mu}) = 40(0.019 + \frac{1}{15}) = 3.44$

ساعت فرمول بنویسیم ولی جواب مال کتاب را بنویسیم

یا $1 - \rho = 1 - 2/3 = 1/3$ = متوسط درصد زمان بیکاری برای هر یک از دکترها

تاب حل کرده $P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$

مثال ۳ ـ ۲ صفحه ۱۲

$c = 3 \quad k = 7 \quad \lambda = 1$ نفر در دقیقه

$E(S) = 6$ دقیقه $\quad L = ? \quad W = ?$ نرخ آنهایی که در یک ساعت نمی‌توانند وارد شوند

Ghaem

Object: مثال (۱-۴) صفحه ۲۷۰ وارد شد Date:

فروشگاهی که دو مدل صف وجود دارد یکی برای خرید و دیگری برای

پرداخت پول

هر کسی خودش بسته خریدش را پیدا می‌کند $M/M/\infty$

در این مدل داریم: ساعت $E(S_1) = 3$ نفر در هر ساعت $\lambda = 40$

$\mu_1 = 4/3$

مدل دوم برای پرداخت پول: $M/M/C$

هر پیشخوان $\mu_2 = 1/4$ ، $\mu_2 = 15$

نفر در هر ساعت $\lambda = 40$ دقیقه $E(S_2) = 4$ $C = ?$

C باید طوری باشد که سیستم در وضعیت تکراری قرار داشته باشد.

$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{C\mu} < 1}$ $E(S) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ ساعت $\Rightarrow \frac{40}{C\,15} < 1$

$C > \frac{\lambda}{\mu}$ $C \geq 3$

$\Rightarrow C > \frac{40}{15} \Rightarrow C > 2.6 \Rightarrow C = 3$ حداقل ۳ پیشخوان نیاز داریم

حداقل

چند پیشخوان را استخدام کنیم؟

الف) $M/M/4 \Rightarrow q = ?$ $L_q = ?$ $L_{کل} = L_1 + L_2$

کل مدت زمان انتظار در صف

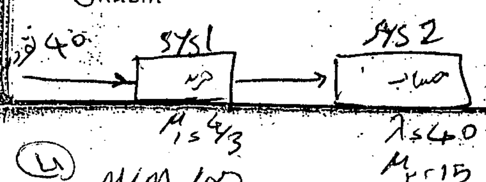
مدل صف

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{15} = 2.6$ $\frac{M/M/\infty}{\text{صف اول}}$ $M/M/4$

صف دوم

$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{2.6}{4} = .65$

Ghaem



مسئول هر دو صف

Object: Date: / /

$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{C!\,C^{k-C}} P_0 = \frac{۲^۶}{۳!\,۳^۴} \times 0.00088 = ...$

چون تعداد آن برابر است $\lambda P_k = \lambda P_۷$ نرخ آنهایی که در یک ساعت نمی‌توانند وارد شوند

آنهایی که یک دقیقه نمی‌توانند وارد شوند حالا می‌خواهیم بدانیم نرخ آنهایی که در یک ساعت یعنی ۶۰ دقیقه نمی‌توانند وارد شوند چقدر است می‌شود:

$\lambda P_۷ \times 60 = 30.4$ اتومبیل در هر ساعت

$\lambda - \lambda'$

مثال (۴-۲) صفحه ۱۲۶

دقیقه $E(S) = ۹۰$ نفر در هر ساعت تلویزیون را روشن می‌کنند 1000

هر کسی خودش با روشن کردن تلویزیون به $M/M/\infty$ $L = ?$

به خودش سرویس می‌دهد ادامه این برنامه را تا $L = \frac{\lambda}{\mu}$

$E(S) = \frac{۹۰}{۶۰} = ۳/۲ = ۱/۵$ ساعت $E(S) = \frac{1}{\mu}$

(با احتمال انتخاب برنامه کفر زودا است)

Ghaem

$L = 20000 \times 1.5 = 30000$ نفر

$L = \frac{\lambda}{\mu}$

(۴۰)

Object: Date: / /

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{3} \frac{(2.6)^n}{n!} + \frac{(2.6)^4}{4!} \, 2.85 \right]^{-1}$

$P_0 = \left(1 + ۲/۶ + \frac{(۲/۶)^۲}{\underset{۲/۳۸}{۲}} + \frac{(۲/۶)^۳}{۳!} + ۵/۴ \right]^{-1} = ۰/۰۶$

$L_q = \frac{\rho^{c+1} \times c^c}{c!(1-\rho)^۲} P_0 = \frac{(۰/۶۵)^۵ \times ۴^۴}{۴!(۰/۳۵)^۲} = 0.76$

$W_{q_1} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.76}{40} = 0.019 = ۱/۱۴$ دقیقه ($\times ۶۰$)

$L_1 = \lambda W_1 \quad W_1 = W_{1q} + E(S_1) = 0.019 + \frac{1}{15} =$

$L_1 = ۴۰ \times 0.76 = 3.44$

در کل $L = L_1 + L_2 = 3.44 + 30 = 33.44$

$L_2 = \frac{\lambda}{\mu \cdot p} = ۴۰ \times \frac{3}{4} = 30$ (M/M/∞)

مثال (۲-۴) صفحه ۲۸۸ شبکه جکسون بسته ?

Ghaem

(۴۱)

Object: Date:

مثال (۳-۴) صفحه ۳۰۲ مثال صفحه قبل که حل کردیم فقط به جای c=۴ ، c=۳ می گذاریم.

شبیه شبکه صفی Tandem است. (۵۰) وارد شد

برای ۲ صف اول M/M/1 و صف سوم M/M/1/K

برای هر $\lambda \quad \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad L = ? \quad W = ?$

فرمول ص ۱۱۷

$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} + \frac{\rho_3}{1-\rho_3} - \frac{[k+1]\rho_3^{k+1}}{1-\rho_3^{k+1}}$

$\rho_3 = \lambda / \mu_3 \quad W = W_1 + W_2 + W_3$

$W = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} + \frac{L_3}{\lambda_\alpha} \quad \lambda_\alpha = \lambda(1 - P_3(k))$ ، $\lambda(1-P_k)$

مثال (۵-۴) صفحه ۳۰۳ شبکه باز — این شبکه صفحه ۹ وارد

دو صف دارد M/M/1

$\lambda_1 = ۲۰$ ۲۰ نفر در ساعت ، $\frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۲۰ = ۱۲$ نفر در ساعت وارد صف چوبین نمی شوند

$P_1 = \frac{۶۰}{۱۰۰}$

Ghaem

09128747399

Object: Date:

$E(S_2) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ ساعت $\lambda_2 = 10/61$

$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 10/61 \times \frac{1}{12}$

$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0/88}{1-0/88} = 7/6 ;\ L_1 + L_2 = 6/72 + 7/6$

$= 14/32$

$W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1}$ $W_2 = \frac{L_2}{\lambda_2}$ $W = W_1 + W_2$

$W_1 = \frac{6/72}{13/06} = 0/51$ $W_2 = \frac{7/6}{10/61} = 0/71$

$W = W_1 + W_2 = 0/51 + 0/71 = 1/22$ ساعت

از ورود تا ...

سوالات انتهای کتاب کوچک

سوال ۷ صفحه ۲۰۵

$E(t) = 12$ دقیقه $E(S) = 6$ دقیقه

الف)

M/M/1 $P(N \geq 1) = 1 - P_0 = \rho ,\ \rho = \lambda/\mu$

Ghaem

$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $P_0 = 1-\rho$

Object: Date: / /

$P_2 = 40\%$

$\frac{40}{100} \times 20 = 8$ نفر در هر ساعت به طرف پنجره ۲ می روند

$P_{12} = \frac{20}{100}$ $\lambda_1 = 20\times0.6 + 0.1\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = 12 + 0.1\lambda_2$

$\lambda_2 = 20\times0.4 + 0.2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = 8 + 0.2\lambda_1$

$P_{21} = \frac{10}{100}$ $\lambda_1 = 12 + 0.1(8 + 0.2\lambda_1) \Rightarrow 0.98\lambda_1 = 12.8$

$\boxed{\lambda_1 = 13/06}$ $\boxed{\lambda_2 = 10/61}$

out $\frac{2}{10}$ $\frac{80}{100}$ $\frac{90}{100}$

متوسط تعداد نفرات در سیستم

$E(S_1) = 4$ دقیقه $E(S_2) = 5$ دقیقه (الف) $= L_1 + L_2 = ?$

$W = ?$ $E(S_1) = \frac{4}{60}$ ساعت

تبدیل دقیقه به ساعت

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ $\lambda_1 = 13/06$

$\rho_1 = 13/06 \times \frac{4}{60} = 0/87$ $L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{0/87}{1-0/87} = 6/72$

Ghaem

Object: Date: / /

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1/9}{2/3} = 1/6 \Rightarrow$$ بیرسیم

مثال کتاب فرق ... نمی دانم

مدت زمان انتظار در صف

(ج۱) $P(q>10) = 1 - P(q<10) = 1 - 1 + \rho e^{-t/w}$

$P(q>10) = \rho e^{-10/w} = 1/3\, e^{-10/6} = ۰/۰٦٧٣$

$$w = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1/4 - 1/12} = \frac{1}{2/12} = 6$$

د) $Lq \leq 5 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \leq 5 \Rightarrow \frac{\lambda}{1/4(1/4-\lambda)} \leq 5$

$\Rightarrow \lambda \leq \frac{5}{16} - \frac{5}{4}\lambda \Rightarrow \frac{9}{4}\lambda \leq \frac{5}{16} \quad \lambda \leq ۰/۱۳۸$

$\Rightarrow \frac{1}{E(t)} \leq ۰/۱۳۸ \Rightarrow E(t) \geq ۷/۲٤$ دقیقه

Ghaem

Object: Date:

[illegible] در مراحل زیر از چه ... سیستم مطرح می شوند صفحه ۹۰

[illegible] صفحه ۹۰

[illegible] مدل صفحه ۹۱ و معایب مدل

[illegible] صفحه ۹۱

مرحله مدلسازی شامل تعریف، پایه ... و ارزیابی برای مدل

صف

سوال فصل ۶ صفحه ۹۴

زمان سرویس

$\lambda = 1/5$ ... در هر ثانیه پردازش $E(S_0) = 3s \quad E(S_1) = 1s$

زمان S_1 | سرویس S_2 | دیسک S_3

$E(S_2) = 2s \quad E(S_3) = 4s \quad w = ?$

$E'(S_1) = E'(S_2) = E'(S_3) = 2/33 \quad w'_A = ?$

زمان ... را متوسط ... سیستم ...

$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \quad w_0 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda} = \frac{1}{1/3 - 1/5} = 7.5s$

$w_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{1}{1 - 0/2} = 1/25s \quad w_2 = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{1}{1/2 - 0/2} = 3/33s$

Ghaem

$$w_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{1}{1/4 - 0/2} = 20$$

$w = 7/5 + 1/25 + 3/33 + 20 = 32/11$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20}$

μ و $E(S)$ را خیلی کامل می کنی

Object: Date: / /

$W_A = W'_0 + W'_1 + W'_2 + W'_3 \quad W'_0 = 7.5$

$W'_1 = \frac{1}{\mu'_1 - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2.33} - 0.2} = 4.36$ چون $\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3$

$W'_2 = W'_3 = W'_1 \Rightarrow W_A = 7.5 + 3 \times 4.36 = 20.6$

اگر ظرفیت کاری کاملاً تعداد تقاضاهاست ۲۰٪ یعنی ۱۲٪ افزایش

یابد می شود مقداری که افزایش می یابد $0.2 \times 0.12 = 0.024$

ظرفیت کاری — مقدار افزایش یافته

$\Rightarrow \lambda' = 0.12 + 0.024 = 0.144 \Rightarrow W_B = ?$

ظرفیت کاری جدید

$W_B = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 \quad W_0 = \frac{1}{1/3 - 0.144} = 10.715$

$W_1 = \frac{1}{\frac{1}{2.33} - 0.144} = 5.285$ چون $\mu_2 = \mu_3 = \mu_1 \Rightarrow$

$W_2 = W_3 = W_1 \Rightarrow W_B = 10.71 + 3 \times 5.28 = 26.6$

Ghaem

Object: Date: ٨٧

$E(S_0) = 3 \times 0.13 = 0.39$ cpu ۳۰٪ سریعتر شود یعنی

$\Rightarrow E'(S_0) = 3 \ldots 0.19 = 2.1 \Rightarrow W_C = ?$

زمان سرویس cpu جدید

$W_C = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 \quad W_0 = \frac{1}{\mu' - \lambda'} = \frac{1}{\frac{1}{0.21} - \ldots}$

$W_0 = 4.23 \quad W_1 = W_2 = W_3$ بدون تغییر هستند

چون نه μ شان تغییر کرده و نه λ

$W_C = 4.23 + 3 \times 5.28 = 20.07 = 21$

مدل شبکه صف ابزار مناسب صفحه ۹۵

مدل شبکه صف و تئوری صف صفحه ۹۵

مدل شبکه صف و شبیه سازی صفحه ۹۶

ظرفیت کاری مدل باز صفحه ۹۹

ظرفیت کاری دسته ای و ترمینال صفحه ۱۰۰

صفحه ۱۰۲

جدول ۱-۷ حدود مجانبی برای انواع ظرفیت کاری برای نرخ خروجی و زمان پاسخ

Ghaem

$\lambda = 1 \qquad \mu/2 = 6 \qquad C = 1$

۱ تعمیرکار

متوسط تعداد ماشین های ... تا ... متوسط تعداد ماشین در جریان کار

$\lambda W = ٪۵۱$

$\frac{L}{\lambda(M-L)} \qquad L = P_0[\;\;] \qquad P_0 = [\;\;]^{-1}$

حالت ۳ تعمیرکار

$$\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{5!}{(5-n)!\times n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=3}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\,3^{n-3}\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] =$$

$$1 + \frac{5!}{4!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5!}{3!\times 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5!}{2!\times 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5!}{3!\times 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{5!}{3^2\times 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 + 2.5 + 2.5 + 1.25 + 0.42 + 0.07$$

$٪۷۴ \rightarrow P_0 = ٪۱۲۹$

$$L = P_0\left[\sum_{n=0}^{2} n\,\frac{5!}{(5-n)!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\sum_{3}^{5} n\,\frac{5!}{(5-n)!\,3^{n-3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\left[\frac{5!}{4!\times 2} + \frac{2\times 5!}{3!\times 2!\times 4} + \frac{1}{6}\left[\frac{3\times 5!}{2!\times 2^3} + \frac{4\times 5!}{3\times 2^4} + \frac{5\times 5!}{3^2\times 2^5}\right]\right]$$

$5 + 5 + 1/6\,(۲۲.۵ + ۱۵ + ۳.۸۴)$

حالت یک تعمیرکار

یک خشکشویی ۵ ماشین ...

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{5} \frac{5!}{(5-n)!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n} \Rightarrow$$

$$\sum = \frac{5!}{4!}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{5!}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{5!}{0!}\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$٪۸۳ + ٪۵۵ + ٪۲۷ + ٪۰۹۲ + ٪۰۱۵ = ۱/۷۵ + 1 = 2.75$

$\boxed{P_0 = ٪۳۶۳۶}$

$$L = P_0\left[\sum_{n=0}^{0} n + 1\sum_{n=1}^{5} n\,\frac{5!}{(5-n)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] = P_0\left[0 + \frac{5!}{4!}\times\frac{1}{6} + \frac{2\times 5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5!\times 3}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{5!\times 4}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{5\times 5!}{0!}\left(\frac{1}{6}\right)^5\right]$$

$= P_0[0 + ٪۸۳ + ۱/۱ + ٪۸۳ + ٪۳۷ + ٪۰۷۷] = \boxed{۱/۱۴}$

$W = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{۱/۱۴}{1(5-۱/۱۴)} = \frac{۱/۱۴}{۳/۸۶} = \boxed{٪۳۰}$

راحت تر حساب میشود ...

$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0) \Rightarrow 5 - 6(1 - ٪۳۶۳۶) = \boxed{۱/۱۸}$

ص ۱۷۵ کتاب ج ۱

شبیه‌سازی دارا باشیم

س 2-12

حالت اول)

$\lambda = 3$

$E(S) = 7/24$ $\rightarrow$ $\rho = \lambda \cdot E(S)$

هزینه ثابت $= 75$

$\rho = 7/8 < 1 \Rightarrow$ سیستم پایدار است

$\mu = 1/E(S) = 24/7$

مدل سیستم: $M/M/1$ نمی باشد؟

هزینه : $75 + W \times 5$

$W = \frac{E(S)}{1-\rho} = \frac{7/24}{1-7/8} = 7/3$ روز

هزینه $= 7/3 \times 5 + 75 = 87$ دلار/روز

حالت دوم)

$E(S) = 1/4 \Rightarrow \mu = 1/E(S) = 4$

که ثابت $= 3$

$\rho = \lambda/\mu = 3/4 < 1$ وضعیت یکنواخت

$W = \frac{E(S)}{1-\rho} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1$ روز

هزینه $1 \times 5 + 75 = 80$ دلار/روز

FARAZ

ص ۲۷۰ کتاب تا اول فصل ۳-۱ مثال

$\mu = \frac{4}{3} \Leftarrow E(S) = \frac{3}{4}$ ساعت ساعت

خرید → Tandom → پرداخت

$E(S) = 4$ دقیقه $\Rightarrow E(S) = \frac{4}{60}$ ساعت

$\Rightarrow \mu = \frac{60}{4} = 15$ در ساعت / نفر

$M/M/\infty$ $M/M/C$ ؟

تا زمانی که پایدار شود $C = 4$

صف در خرید $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{\frac{4}{3}} = \frac{120}{4} = 30$

در صف پرداخت $C_m > \frac{\lambda}{\mu}$ باید $\Rightarrow C_m > \frac{40}{15} \Rightarrow C_m = 3$ or $\boxed{C_m = 4}$

2.6

فرض مسئله

$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{40}{15 \times 4} = \frac{2}{3}$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n}{n!} + \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{3} \frac{(2.6)^n}{n!} + \frac{(2.6)^4}{4!} \times \frac{1}{1-\frac{40}{15 \times 4}}\right]^{-1} = 1 + \frac{2.6^1}{1!} + \frac{2.6^2}{2!} + \frac{2.6^3}{3!}$$

$$= \left[1 + 2.6 + \frac{2.6^2}{2} + \frac{2.6^3}{6} + \frac{2.6^4}{24} \times 3\right]^{-1}$$

$+ \frac{(2.6)^4}{4!} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

$= [15.62104]^{-1} = 0.0640143216$ ✓

از فرمولهای مربوط به نرخ

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad L_q = \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!(1-\rho)^2} = \frac{0.064 \times (2.6)^5}{4!\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0.00316099$$

$3 \times 3 \times 0.1049$
2.4134

$$W_q = \frac{0.0031}{40} = 0.00025$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c \mu}{\ldots}\right]$$

2.77

$C=3 \quad M/M/3:\infty$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right]$$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}\left(\frac{40}{15}\right)^n+\frac{1}{3!}\left(\frac{40}{15}\right)^3\frac{45}{45-40}\right]^{-1}=\left[2\ldots+28.4\right]=\left[7.2+28.4\right]^{-1}$$

$=0.031$

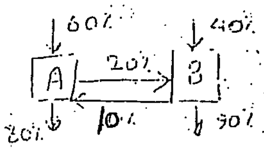
$$\sum_{n=0}^{2}\sim=1+\frac{40}{15}+\left(\frac{40}{15}\right)^2\times\frac{1}{2}=7.2$$

$$W_q=\left[\frac{(\lambda/\mu)^c\mu}{(c-1)!\,(c\mu-\lambda)^2}\right]P_0=P_0\times\left[\frac{284.4}{2\times 25}\right]=0.03\times 5.7=0.17 \text{ ساعت}$$

$L_q=\lambda W_q=40\times 0.17=6.8$

$(M/M/C/\infty)$ $L=\lambda W=\lambda\left(W_q+\frac{1}{\mu}\right)=40(.23)$

$(M/M/\infty)$ $L=\frac{\lambda}{\mu}=30$ $\qquad L_T=30+9.5=39.5$



$\lambda=20$ نفر / ساعت

$\mu_A=1/4\times 60=15$ نفر / ساعت

$\mu_B=1/5\times 60=12$ نفر / ساعت

تمرین 4 ، 10

$L=?$

$W_q=?$

$W=?$

$\lambda_1=\lambda\times P_{0A}+\lambda_2P_{BA}=20\times 0/6+0/1\lambda_2=12+0/1\lambda_2$

$\lambda_2=\lambda\times P_{0B}+\lambda_1\times P_{AB}=20\times 0/4+0/2\lambda_1=8+0/2\lambda_1$

$\lambda_1=12+0/1(8+0.2\lambda_1)=12+0.6+.02\lambda_1$

$0.98\lambda_1=12/8$ $\qquad \lambda_1=13/06$, $\lambda_2=10.61$ | تعداد افراد ورودی به هر ایستگاه

$U_A=\frac{\lambda_A}{\mu_A}=\frac{13.06}{15}=0.87$ $\qquad E(N_A)=\frac{U_A}{1-U_A}=6/79$

$L=6.77+7.3\cong 14$

$U_B=\frac{\lambda_B}{\mu_B}=\frac{10.61}{12}=0.88$ $\qquad E(N_B)=\frac{U_B}{1-U_B}=7.38 \quad 7/3$

$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{14}{20}=0/7$ کل سیستم بر حسب ساعت

$=42$ دقیقه

$W=W_q+\frac{1}{\mu}$ $\qquad W_i=\frac{L_i}{\lambda_i}$ $\qquad W_A=\frac{6.77}{13.06}=0/52$ ساعت

$W_B=\frac{7.3}{10.61}=0.69$ زمان انتظار در هر ایستگاه

$W_q=W-\frac{1}{\mu}$

$W_q=0.52-\frac{1}{15}=0.45$

نسبت زمانی که سرویس دهنده بیکار است = P_0

در صورتی که سیستم نسبت زمانی که یک مشتری در لحظه ورود بدون اینکه انتظار بکشد

$1-P_0$ احتمال اینکه مشتری باید ... باشد، کارش شروع شود.

قبل از شروع سرویس منتظر بماند.

احتمال اینکه تعداد افراد در سیستم بیشتر از ۵ باشد — در مدل $M/M/1$

$P\{N \geq 5\} = \rho^5$

اگر N تعداد افراد سیستم در حالت پایدار باشد، به ازای تمام مقادیر n:

صفحه ۹۰

$P\{N \geq n\} = \rho^n$

متوسط زمانی که برای سرویس داریم: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

احتمال اینکه در سیستم $M/M/C$ سرویس‌دهنده‌ها بیکار باشند همواره $1 - \frac{\lambda}{C\mu}$ است.

صفحه ۱۱۳

احتمال اینکه سرویس‌دهنده‌ها مشغول باشند $\rho = \frac{\lambda}{C\mu}$

کسری از زمان که حداقل یک سرویس‌دهنده بیکار باشد: $\sum_{n=0}^{c-1} P_n$

صفحه ۱۱۷ در حالتی که در مدل $M/M/C/K$ مقدار C بزرگ باشد، برای محاسبه P_n آسان‌تر است که به ترتیب از $C-55$ و $C-59$ و $C-58$ و $C-57$ استفاده کرد تا اینکه مستقل از $C-59$.

مدل ارلنگ $M/M/C/C$: اجازه تشکیل صف داده نمی‌شود.

احتمال از دست رفتن یک ورودی مساوی مشغول بودن تمامی کانال‌ها.

مثلاً در حالت خط تلفن اگر یکی از این کانال‌ها ... همه خط‌ها را مشغول می‌یابند.
با تعداد خطوط محدود

$M/M/\infty$ = سلف سرویس

FARAZ

$\lambda = \frac{1}{10}$ ، $c = 2$ ، $\mu = \frac{1}{5}$ ، $M = 5$ ، $M/M/2/5/5$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} \times c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} \quad (۵۱)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{5}{10} = 0/5$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{5!}{(5-n)! \times n!} (0/5)^n + \sum_{n=2}^{5} \frac{5!}{(5-n)!\, n!} \times \frac{n!}{2^{n-2} \times 2!} \times (0/5)^n \right]$$

$$1 + \frac{5!}{4! \times 1!} \times 0/5 + \frac{5!}{3! \times 2^0 \times 2} \times (0/5)^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{2! \times 2 \times 2} \times (0/5)^3 + \frac{5!}{1! \times 2^2 \times 2} \times (0/5)^4$$

$$1 + 2/5 + 2/5 + 1/9 + 0/9 + 0/2 = 9/0 \Rightarrow P_0 = 0/11$$

$$P_4 = \frac{1}{2^2 \times 2!} \times (0/5)^4 \times 0/11 = 8/6 \times 10^{-4}$$

$$4/5 \times P_4 = 4/9 \times 10^{-3}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

(صفحه ۲۲۳-۲۲۴)

Approximate values of the standard normal distribution function:

ز	.۰۰	.۰۱	.۰۲	.۰۳	.۰۴	.۰۵	.۰۶	.۰۷	.۰۸	.۰۹
.	.۵۰۰۰	.۵۰۴۰	.۵۰۸۰	.۵۱۲۰	.۵۱۶۰	.۵۱۹۹	.۵۲۳۹	.۵۲۷۹	.۵۳۱۹	.۵۳۵۹
.۱	.۵۳۹۸	.۵۴۳۸	.۵۴۷۸	.۵۵۱۷	.۵۵۵۷	.۵۵۹۶	.۵۶۳۶	.۵۶۷۵	.۵۷۱۴	.۵۷۵۳
.۲	.۵۷۹۳	.۵۸۳۲	.۵۸۷۱	.۵۹۱۰	.۵۹۴۸	.۵۹۸۷	.۶۰۲۶	.۶۰۶۴	.۶۱۰۳	.۶۱۴۱
.۳	.۶۱۷۹	.۶۲۱۷	.۶۲۵۵	.۶۲۹۳	.۶۳۳۱	.۶۳۶۸	.۶۴۰۶	.۶۴۴۳	.۶۴۸۰	.۶۵۱۷
.۴	.۶۵۵۴	.۶۵۹۱	.۶۶۲۸	.۶۶۶۴	.۶۷۰۰	.۶۷۳۶	.۶۷۷۲	.۶۸۰۸	.۶۸۴۴	.۶۸۷۹
.۵	.۶۹۱۵	.۶۹۵۰	.۶۹۸۵	.۷۰۱۹	.۷۰۵۴	.۷۰۸۸	.۷۱۲۳	.۷۱۵۷	.۷۱۹۰	.۷۲۲۴
.۶	.۷۲۵۷	.۷۲۹۱	.۷۳۲۴	.۷۳۵۷	.۷۳۸۹	.۷۴۲۲	.۷۴۵۴	.۷۴۸۶	.۷۱۵۷	.۷۵۴۹
.۷	.۷۵۸۰	.۷۶۱۱	.۷۶۴۲	.۷۶۷۳	.۷۷۰۴	.۷۷۳۴	.۷۷۶۴	.۷۷۹۴	.۷۸۲۳	.۷۸۵۲
.۸	.۷۸۸۱	.۷۹۱۰	.۷۹۳۹	.۷۹۶۹	.۷۹۹۵	.۸۰۲۳	.۸۰۵۱	.۸۰۷۸	.۸۱۰۶	.۸۱۳۳
.۹	.۸۱۵۹	.۸۱۸۶	.۸۲۱۲	.۸۲۳۸	.۸۲۶۴	.۸۲۸۹	.۸۳۱۵	.۸۳۴۰	.۸۳۶۵	.۸۳۸۹
۱,۰	.۸۴۱۳	.۸۴۳۸	.۸۴۶۱	.۸۴۸۵	.۸۵۰۸	.۸۵۳۱	.۸۵۵۴	.۸۵۷۷	.۸۵۲۹	.۸۶۲۱
۱,۱	.۸۶۴۳	.۸۶۶۵	.۸۶۸۶	.۸۷۰۸	.۸۷۲۹	.۸۷۴۹	.۸۷۷۰	.۸۷۹۰	.۸۸۱۰	.۸۸۳۰
۱,۲	.۸۸۴۹	.۸۸۶۹	.۸۸۸۸	.۸۹۰۷	.۸۹۲۵	.۸۹۴۴	.۸۹۶۲	.۸۹۸۰	.۸۹۹۷	.۹۰۱۵
۱,۳	.۹۰۳۲	.۹۰۴۹	.۹۰۶۶	.۹۰۸۲	.۹۰۹۹	.۹۱۱۵	.۹۱۳۱	.۹۱۴۷	.۹۱۶۲	.۹۱۷۷
۱,۴	.۹۱۹۲	.۹۲۰۷	.۹۲۲۲	.۹۲۳۶	.۹۲۱۵	.۹۲۶۵	.۹۲۷۹	.۹۲۹۲	.۹۳۰۶	.۹۳۱۹
۱,۵	.۹۳۳۲	.۹۳۴۵	.۹۳۵۷	.۹۳۷۰	.۹۳۸۲	.۹۳۹۴	.۹۴۰۶	.۹۴۱۸	.۹۴۹۲	.۹۴۴۱
۱,۶	.۹۴۵۲	.۹۴۶۳	.۹۴۷۴	.۹۴۸۴	.۹۴۹۵	.۹۵۰۵	.۹۵۱۵	.۹۵۲۵	.۹۵۳۵	.۹۵۴۵
۱,۷	.۹۵۵۴	.۹۵۶۴	.۹۵۷۳	.۹۵۸۲	.۹۵۹۱	.۹۵۹۹	.۹۶۰۸	.۹۶۱۶	.۹۶۲۵	.۹۶۳۳
۱,۸	.۹۶۴۱	.۹۶۴۹	.۹۶۵۶	.۹۶۶۴	.۹۶۷۱	.۹۶۷۸	.۹۶۸۶	.۹۶۹۳	.۹۶۹۹	.۹۷۰۶
۱,۹	.۹۷۱۳	.۹۷۱۹	.۹۷۲۶	.۹۷۳۲	.۹۷۳۸	.۹۷۴۴	.۹۷۵۰	.۹۷۵۶	.۹۷۶۱	.۹۷۶۷
۲,۰	.۹۷۷۲	.۹۷۷۸	.۹۷۸۳	.۹۷۸۸	.۹۷۹۳	.۹۷۹۸	.۹۸۰۳	.۹۸۰۸	.۹۸۱۲	.۹۸۱۷
۲,۱	.۹۸۲۱	.۹۸۲۶	.۹۸۳۰	.۹۸۳۴	.۹۸۳۸	.۹۸۴۲	.۹۸۴۶	.۹۸۵۰	.۹۸۵۴	.۹۸۵۷
۲,۲	.۹۸۶۱	.۹۸۶۴	.۹۸۶۸	.۹۸۷۱	.۹۸۷۵	.۹۸۷۸	.۹۸۸۱	.۹۸۸۴	.۹۸۸۷	.۹۸۹۰
۲,۳	.۹۸۹۳	.۹۸۹۶	.۹۸۹۸	.۹۹۰۱	.۹۹۰۴	.۹۹۰۶	.۹۹۰۹	.۹۹۱۱	.۹۹۱۳	.۹۹۱۶
۲,۴	.۹۹۱۸	.۹۹۲۰	.۹۹۲۲	.۹۹۲۵	.۹۹۲۷	.۹۹۲۹	.۹۹۳۱	.۹۹۳۲	.۹۹۳۴	.۹۹۳۶
۲,۵	.۹۹۳۸	.۹۹۴۰	.۹۹۴۱	.۹۹۴۳	.۹۹۴۵	.۹۹۴۶	.۹۹۴۸	.۹۹۴۹	.۹۹۵۱	.۹۹۵۲
۲,۶	.۹۹۵۳	.۹۹۵۵	.۹۹۵۶	.۹۹۵۷	.۹۹۵۹	.۹۹۶۰	.۹۹۶۱	.۹۹۶۲	.۹۹۶۳	.۹۹۶۴
۲,۷	.۹۹۶۵	.۹۹۶۶	.۹۹۶۷	.۹۹۶۸	.۹۹۶۹	.۹۹۷۰	.۹۹۷۱	.۹۹۷۲	.۹۹۷۳	.۹۹۷۴
۲,۸	.۹۹۷۴	.۹۹۷۵	.۹۹۷۶	.۹۹۷۷	.۹۹۷۷	.۹۹۷۸	.۹۹۷۹	.۹۹۷۹	.۹۹۸۰	.۹۹۸۱
۲,۹	.۹۹۸۱	.۹۹۸۲	.۹۹۸۲	.۹۹۸۳	.۹۹۸۴	.۹۹۸۴	.۹۹۸۵	.۹۹۸۵	.۹۹۸۶	.۹۹۸۶
۳,۰	.۹۹۸۷	.۹۹۸۷	.۹۹۸۷	.۹۹۸۸	.۹۹۸۸	.۹۹۸۹	.۹۹۸۹	.۹۹۸۹	.۹۹۹۰	.۹۹۹۰
۳,۱	.۹۹۹۰	.۹۹۹۱	.۹۹۹۱	.۹۹۹۱	.۹۹۹۲	.۹۹۹۲	.۹۹۹۲	.۹۹۹۲	.۹۹۹۳	.۹۹۹۳
۳,۲	.۹۹۹۳	.۹۹۹۳	.۹۹۹۴	.۹۹۹۴	.۹۹۹۴	.۹۹۹۴	.۹۹۹۴	.۹۹۹۵	.۹۹۹۵	.۹۹۹۵
۳,۳	.۹۹۹۵	.۹۹۹۵	.۹۹۹۵	.۹۹۹۶	.۹۹۹۶	.۹۹۹۶	.۹۹۹۶	.۹۹۹۶	.۹۹۹۶	.۹۹۹۷
۳,۴	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۷	.۹۹۹۸

پاسخ) [illegible] $M/M/1//1$ [illegible] چهارم $\quad C=1,\ M=1,\ \lambda=\mu_1,\ \mu=\mu_2$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{C-1}\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=C}^{M}\binom{M}{n}\frac{n!}{C^{n-C}C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}=\left[\sum_{n=0}^{1}\frac{1!}{(1-n)!}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^n+\sum_{n=1}^{1}\frac{n!}{C^{n-C}\,(1-n)!\,n!}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^n\right]^{-1}=\left[1+\frac{1!}{1!}\times\frac{1}{1}\times\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{\mu_2+\mu_1}{\mu_2}\right]^{-1}$$

$$\rightarrow\ \boxed{P_0=\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_1}}\qquad P_1=\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\times\frac{1!}{1!\,0!}=\boxed{\frac{\mu_1^2}{(\mu_2+\mu_1)\mu_1}}$$

[illegible]

$N=1 \qquad C_1=1 \qquad C_2=1 \qquad k=2$

$$P_{n_1,n_2}=\frac{1}{G(N)}\cdot\frac{\mu_1^{\,1-n_1}}{\mu_2^{\,n_2}}\qquad a_1(n_1)=1\qquad a_2(n_2)=1$$

$$(0,1),\ (1,0)\ \longrightarrow\ G(N)=\frac{\rho_1^0}{a_1(n_1)}\times\frac{\rho_2^1}{a_2(n_2)}+\frac{\rho_1^1}{a_1(n_1)}\times\frac{\rho_2^0}{a_2(n_2)}=\rho_2+\rho_1$$

$$P_{n_1,n_2}=\frac{1}{\rho_1+\rho_2}\left(\frac{\mu_1^{\,1-n_1}}{\mu_2}\right)\qquad \rho_1\mu_1=\rho_2\mu_2\ \rightarrow\ \rho_1=1,\ \rho_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$P_1=P_{1,0}=\frac{1}{1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}\left(\frac{\mu_1^0}{\mu_2}\right)=\frac{1}{\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_2}}=\boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}}$$

$$P_0=P_{0,1}=\frac{1}{1+\frac{\mu_1}{\mu_2}}\times\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\times\frac{\mu_1}{\mu_2}=\boxed{\frac{\mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}}$$

۲۵)

هزینه نگهداری سفارش = $30 $ در ساعت

مدل (۱) $M/M/2$ ✓

هزینه : 150000

$E(s) =$ ... $\mu = \frac{1}{6}$ ساعت $\lambda = \frac{1}{8}$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(0.75)^n + \frac{1}{2}\times(0.75)^2 \times \dots}$$

$$= \frac{1}{1 + 0.75 + 0.44} = 0.45$$

$$W = 6 + \left[\frac{0.09}{0.21}\right] \times 0.45 = 6.19$$

هزینه در سال $= 6.19 \times 24 \times 356 \times 30 = 1,587,\dots$

هزینه مدل $= \,//\, + 150000 = 1,73\dots$

مدل ۲ $M/M/1$

هزینه : 200000

$\Rightarrow \mu = 1/3 \quad \lambda = 1/8 \quad W = ?$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1/3 - 1/8} = \frac{1}{\frac{8-3}{24}} = \frac{24}{5}$$

$= 4{,}8$ نرخ اجرای در ساعت

هزینه در سال $= 4{,}8 \times 24 \times 356 \times 30 =$

$1,230,336 \quad 365$

هزینه شغل : $1230336 + 200000 =$

$1,430,336$

مدل ۲ کم هزینه تر است

۳۱-۲) $M/M/1/1/3$ $c=1$

$\lambda = 4 = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \qquad \mu = \frac{1}{15}$ دقیقه

$$W_q(t) = 1 - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(\mu c t)^i}{i!} e^{-\mu c t} \qquad e^{-\frac{20}{15}}$$

$$q_n = \frac{P_n}{1 - P_K}$$

$$W_q(20) = 1 - \sum_{1}^{2} P_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1.3)^i \times 0.27}{i!} =$$

$$W_q(20) = 1 - \sum_{1}^{2} 1/3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1.3)^i \times 0.27}{i!} =$$

$$n = 1 \rightarrow 1/3 \left[\sum_{0}^{0} \frac{(1.3)^0 \times 0.27}{0!}\right] = 1/3 \times 0.27 = 0.09$$

$$n = 2 \quad \frac{1}{3}\left[\sum_{0}^{1} \frac{(1.3)^i \, 0.27}{i!}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{(1.3)^0 \times 0.27}{0!} + \frac{1.3 \times 0.27}{1}\right]$$

$$W_q(20) = 1 - [0.09 + 0.09 + 0.117] = 0.703$$

(2-12

امکانات برای یک آمبولانس در شهر $M/M/1$

نرخ متوسط ورود $\lambda = 3$ در روز آمبولانس

زمان سرویس (متوسط) $\frac{1}{\mu} = \frac{7}{24}$ روز $\rightarrow$ $\mu = \frac{24}{7}$ در هر روز $\frac{24}{7}$ آمبولانس سرویس داده می‌شود

هزینه ثابت کارکرد تجهیزات شرکت 75 هزار در روز است.

با هزینه ... برای هر ... ماندن یک آمبولانس ... است

$\frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{4}$ روز $\rightarrow$ $\mu_2 = 4$ در روز 4 آمبولانس سرویس داده می‌شود.

با تغییر ... در حالت اول علاوه بر هزینه ... کارکرد تجهیزات ... آمبولانس ... بیشتر از حالت دوم ... هزینه ... تعداد آمبولانس ... هزینه ... تجهیزات ... هزینه ... این هزینه ... میزان ... کمتر ...

$$\mu = \frac{24}{7} \qquad L_1 = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{\frac{24}{7} - 3} = 7$$

میانگین تعداد آمبولانس در سیستم ...

$$\mu = 4 \qquad L_2 = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3$$

$$L_1 - L_2 = 7 - 3 = 4$$

تفاوت تعداد آمبولانس ...

$$4 \times 5 = 20$$

...

$$75 + 20 = 95$$

کل هزینه ...

(2-21

تعداد ... 25

... $25 - 2 = 23$

$M/M/23$

$\mu = \frac{1}{21} \rightarrow \frac{1}{\mu} = 21$

نرخ ... $\lambda = \frac{347}{365}$ روز

$c = 23$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{\frac{347}{365}}{23 \cdot \frac{1}{21}} = \frac{21 \times 347}{23 \cdot 365} = \%868$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}} \quad \cdots = \frac{1}{\sum^{22}_{n=0} \cdots}$$

$$\text{احتمال بیکار ماندن} = 1 - \rho = 1 - \frac{21 \cdot 347}{23 \cdot 365} = \%132$$

... ترکیب

$$L_q = \frac{P_0 \rho^{c+1}}{c!\,(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible]

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $\quad L_2 = \frac{2\lambda}{2\mu - 2\lambda} = \frac{2\lambda}{2(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ ثابت $\quad \lambda_2 = 2\lambda$, $\mu_2 = 2\mu$

10/2

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ $\quad L_q = \frac{4\lambda^2}{2\mu(2\mu-2\lambda)} = \frac{4\lambda^2}{2\mu \times 2(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$W = \frac{L}{\lambda}$

$W = \frac{L}{2\lambda} = \frac{1}{2}\frac{L}{\lambda}$ نصف می‌شود

$\lambda = 10$ ساعت $= 1/6$ دقیقه

$\mu = 1/4$ دقیقه

11/2

الف) $Pr(N \geq 2) = \rho^2 = .44$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/6}{1/4} = 0.66$

ب) $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(.66)^2}{1/4(1/4 - 1/6)}$

20.9

ج) $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1/4 - 1/6} = 12$ دقیقه

د) $W_q(t > 5) = 1 - W_q(t < 5) = 1 - [1 - \rho e^{-t/w}] = \rho e^{-t/w} = 0.66 e$

ه) $P_0 \times \lambda' = (1-\rho)\lambda' = 22 \times (1 - 0.66) = 7.48$

$\lambda = ۲$ $\quad E(s) = \frac{۷}{۲۴}$ $\quad \rho_1 = \frac{۷}{۸}$

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $\quad M/M/1$ $\quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

12/2

$L_1 = \frac{۳}{\frac{۲۴}{۷} - ۳} = ۷$

$۷۵ + ۵ \times ۷ = x + ۵ \times ۳$

$x = ۹۵$

$\rho = \lambda E(s)$

$\lambda_۲ = ۴$ $\quad E_۲(s) = ۱/۶$ $\quad \rho_۲ = ۳/۱$

$L_۲ = \frac{۳}{۶ - ۴} = ۲$

$\mu(\mu-\lambda)$ ... - هزینه انتظار هزینه خدمت

$M/M/1$?

$= \lambda \times C_1 \times \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ هزینه بیکاری ... μC_2

جمع هزینه ؛ $\frac{C_1\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} + \mu C_2 \xrightarrow{\min} \frac{[-2\mu-\lambda]C_1\lambda^2}{(\mu^2-\lambda\mu)^2} + C_2 = 0$

$\mu^2 - \mu\lambda$

$\frac{2C_1\lambda^2\mu - C_1\lambda^3 + C_2[(\mu^2-\lambda\mu)^2]}{(\mu^2-\lambda\mu)^2}$

$-2C_1\lambda^2\mu - C_1\lambda^3 + C_2[\mu^4 - 2\lambda\mu^3 + \lambda^2\mu^2] = 0 \to ?$

تمرین 14-2

$P(k \geq c) = 1 - [P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1}]$

$P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1} = P_0 + P_0 \times \frac{\lambda}{\mu} + P_0 \times (\frac{\lambda}{\mu})^2 \frac{1}{2!} + \dots + P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^{k-1} \frac{1}{(k-1)!}$

$P_0 [1 + \frac{\lambda}{\mu} + (\frac{\lambda}{\mu})^2 \frac{1}{2!} + \dots + (\frac{\lambda}{\mu})^{k-1} \frac{1}{(k-1)!}] = P_0 \times \sum_{n=0}^{k-1} (\frac{\lambda}{\mu})^n \times \frac{1}{n!}$

$= 1 - [(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}})^{-1} (\sum_{n=0}^{k-1} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!})]$

$M/M/23$ تمرین

$M/M/23$ ~~$\mu = \frac{1}{3}$~~ $E(s) = 3$ ~~ساعت~~ ... $= 3$ ... $= \frac{1}{16}$ ... سال

$\mu = 16$ در سال $\quad \lambda = \frac{347}{365} = 0.97$ در سال ... تعداد درخواست ها

0.94

$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{22} \frac{1}{n!} (\frac{0.97}{16})^n + \frac{1}{23!} (\frac{0.97}{16}) \times [\frac{23 \times 16}{23 \times 16 - 0.97}]} \quad \rho = \frac{1}{21} \quad \lambda = \frac{347}{365} = \frac{1}{1.06} = 0.94$

جواب نهایی

$(\frac{1/3470}{1/14}) \leq 1.0$

... ناچیز

(21.2

$P_0 = 0.94$ ... W_q ... $\dfrac{(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!\,(c\mu-\lambda)^2} \times P_0$

انتظار مردان

در زمان

$$\frac{(0.06)^{23} \times 16}{۹/۶\times10^{۲۱} \times ۱۳۴۷۱/۰۴} \times ۰/۹۴ = \frac{۱/۳\times10^{-۲۷}}{۱/۴\times10^{۲۴}} \times ۰/۹۴ = ۹/۶\times10$$

$\cong ۸/۷۴۸ \times 10^{-۲۸}$ انتظار در صف برای هر نفر ساعت

$\cong ۱/۰۹ \times 10^{-۲۷}$ در سیستم

تمرین ۲-۲۲ ورود کار ۷ روزانه $\mu = \frac{1}{۲۸} \times ۴۲۰ = ۱۵$ روزانه $\lambda = ۲۱$ روزانه

$W_q < ۰/۲۰$ ساعت $c =$

۹

$\frac{21}{7}$ ۹

۱۲) در حالت با بردسی می‌کنیم ۲ سیستم M/M/1 و یک سیستم M/M/2 -

$\lambda = 20$ متر/ساعت $\lambda_T = 40$ متر/ساعت $\mu_1 = \mu_2 = \frac{60}{2} = 30$ $\mu_T = \frac{1}{24}$

۲ سیستم M/M/1 :

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30 - 20} = 2$ $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{20} = 0/1$ ساعت هر باجه

$W_q(t > 5) = \rho e^{-t/w} = \frac{2}{3} \times e^{-5/6} = 2/3 \times e^{-0/83} = 0/29$

$L_T = 4$ $W_T = 6 \times 2 = 12$ دقیقه ~~$W_q(t>5) = 0/29$~~

$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{20}{30} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} \times 100 = 33/3\%$ اوقات بیکاری هر باجه

~~$44/7\%$~~ ?

~~$20 \times \frac{1}{3} \times 8 = 1/4$ ساعت بیکاری~~

$\frac{1}{3} \times 60 = 20$ دقیقه بیکاری در یک روز کاری

یک سیستم M/M/2 :

$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{2!} \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \times \left(\frac{2 \times 25}{50 - 40}\right) \right]^{-1}$

$\sum = 1 + 1/6 + 0/8 = 3/4$ $3/4 + \frac{1}{2} \times 2/26 \times 5$

$P_0 = 0/10$

$W_q = P_0 \times \left[\frac{44}{17 \quad 100} \right] = 0/1 \times 0/44 = 0/044$

$= 3/8$

$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0/044 + \frac{1}{25} = 0/104$

$L = \lambda W = 40 \times 0/104 = 4/16$

$W_q(t > 5) = 1 - W_q(t \leq 5) = 1 - \left[\frac{(1/6)^2 \times (1 - e^{\dots})}{2(2 - 1/6)} \right]$ 2/56 ، 0/4

$2(1/6)^2$ 0/512

$\lambda = \frac{1}{40}$ ✓ $\quad \underline{C=2} \quad \mu = \frac{1}{30}$ ✓ $\quad M/M/2$ (حالت ۲)

B ماشین $\quad \underline{C=1} \quad \mu = \frac{1}{15} \quad \frac{\lambda}{\mu} = 0.75 \quad M/M/1$

$$B \text{ ماشین} = L_A = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1/40}{1/15 - 1/40} = 0.6 \quad (C=1)$$

A ماشین =

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(0.75)^n + \frac{1}{2!} \times 0.562 \times \frac{\frac{2}{30}}{\frac{2}{30}-\frac{1}{40}}\right]^{-1} = [\ldots]^{-1} = 0.45$$

$$W_{q_A} = 0.45 \times \left[\frac{0.0187}{0.0017}\right] \simeq 4.8 \qquad W_A = 4.8 + \frac{1}{1/30} \simeq 34.8$$

$$L_A = \lambda W = \frac{1}{40} \times 34.8 = 0.87 \qquad L_q = W_q \times \lambda = 4.8 \times 1/40 = 0.12$$

B ماشین $\quad W_B = 1/\lambda \quad W_B = \frac{0.6}{1/40} = 0.6 \times 40 = 24$

(2) $\quad L_{q_A} \times 20 + W_A \times 15 = L_{q_B} \times 20 + W_B \times x$

$$0.12 \times 20 + 34.8 \times 15 = \frac{20 \times 1/40^2}{1/15(1/15 - 1/40)} + \ldots$$

$$525.2 = 2.45 + \frac{0.125}{2.2 \times 10^{-3}} \qquad 525.2 - 4.5 \ldots$$

$x = 144.1$

$$W_q = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}\right] P_0$$

۹,۲۲۸ ⇒ ۲۲۱,۴ ~~۲۷۵ = ۸۰۸۱۱~~

۱۲,۶۰۵

۶۸۰,۸۹۵

هزینه زمان انتظار = ۲۰$ در ساعت

(۲۵-۲

مدل (۱) $M/M/2$

هزینه: ۱۵۰۰۰

$E(s) = 6 \Rightarrow \mu = \frac{1}{6}$ ساعت $\lambda = \frac{1}{8}$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(0.75)^n + \frac{1}{2}(0.75)^2 \cdot \frac{1}{1-0.375}}$$

$$= \frac{1}{1 + 0.75 + 0.44} = 0.45$$

$$W = 6 + \left[\frac{0.09}{0.21}\right] \times 0.45 \simeq 6.19$$

هزینه در سال $= 6.19 \times 24 \times 365 \times 30 = ۱۵۸۷۰۵$

هزینه مدل $= // + 15000 = ۱۷۳۷۰۵$

مدل ۲ $M/M/1$

هزینه: ۲۰۰۰۰

$E(s) = 3 \Rightarrow \mu = 1/3 \quad \lambda = 1/8 \quad W = ?$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1/3 - 1/8} = \frac{1}{\frac{8-3}{24}} = \frac{24}{5}$$

$= ۴,۸$ ساعت

چون زمان ورود دستگاه ها در روز بر حسب ساعت

هزینه در سال $= ۴,۸ \times ۲۴ \times ۳۶۵ \times ۳۰ =$

۱,۲۲۳,۰۳۳۶

هزینه مدل: $۱۲۲۳۰۳۳۶ + ۲۰۰۰۰ =$

۱,۴۳۰,۳۳۶

مدل ۲ کم هزینه تر است

(۳۱-۲ $M/M/1/3$ $\rho = 1$

$\mu = \frac{1}{15}$ دقیقه $\quad \lambda = 4 = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

$$Wq(t) = 1 - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(\mu c t)^i}{i!} e^{-\mu c t} \qquad e^{-\frac{20}{15}}$$

$$q_n = \frac{P_n}{1 - P_K} \qquad P_n = \frac{1}{K+1} \qquad q_n = \frac{1 - \frac{1}{K+1}}{\ldots} \qquad q_n = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$$Wq(20) = 1 - \sum_{1}^{2} P_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1.3)^i \times 0.27}{i!} =$$

$$Wq(20) = 1 - \sum_{1}^{2} 1/3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1.3)^i \times 0.27}{i!} =$$

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{3}\left[\sum_{0}^{0} (1.3)^0 \times 0.27\right] = \frac{1}{3} \times 0.27 = 0.09$$

$$n = 2 \quad \frac{1}{3}\left[\sum_{0}^{1} \frac{(1.3)^i \times 0.27}{i!}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{(1.3)^0 \times 0.27}{0!} + \frac{1.3 \times 0.27}{1}\right]$$

$$Wq(20) = 1 - [0.09 + 0.09 + 0.117] = 0.703$$

$$Wq(t) \Rightarrow 1 - \sum_{n=c}^{c+m-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(\mu c t)^i e^{-\mu c t}}{i!}$$

۳۱ - ساعت $M/M/1//10$ ؟ $\lambda = ۲۰$ ساعت $\mu = \frac{1}{۱۲} \times ۶۰ = ۵$

$\rho = ۴$

ساعت کاری : ۱۰

متوسط مقدار ... $= \lambda \times P_{۱۰} \times ۱۰ = ۲۰ \times ۱۰ \times \frac{(1-۴) \times ۴^{۱۰}}{1-۴^{۱۱}} = ۲۰۰ \times \frac{۳۱۴۵۷۲۸}{۴۱۹۴۳۰۳}$

درخواست در دقیقه را ...

$M/M/1//9$ ؟

۳۲ - $L_q = L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$ $L - L_q = \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$

متوسط افرادی که در واحد زمان سرویس دریافت می‌کنند

$\lambda = ۵$ ، $\mu = ۶$ ساعت $\rho = \frac{۵}{۶}$ $= \frac{\frac{۵}{۶}(1-\frac{۵}{۶}^{۹})}{1-\frac{۵}{۶}^{۱۰}}$ $/۸۱$ ... $1 - \%۱۴$

سود در ساعت

سود روزانه : $۰/۰۱۷ \times ۶ \times ۲/۲۵ = ۲/۲۹ \simeq ۲/۳$

محدودیت را ... ۲۰ ... کار

به کارها ، شغل را پتانسیل جداکن
تا وقتی کارها را پتانسیل جلو برد ...
... را بپذیرد، بعدی نمی‌توان انتظار داشت
$M/M/1//10$

$L_q = L - (1-\rho)$ $\frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$ $\frac{1}{۲}$ ۰/۹۴۵

۱۵۸ ۱/۹۷

۳۷

$8 \div 4 = 2$ هفته $\lambda = 2$ در هفته   مدل M/M/1/5

$\mu = 0/1$ در هفته

$L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{0/1} = 20$ الگوی تکاملی در هفته

۳۵

$C = 3$ $\lambda = 20$ نفر/ساعت $\mu = 10$ نفر/ساعت

مدل M/M/1/4

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{10} = 2$

$$L_q = \frac{(1-\rho)\rho^{k}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{(1-2)\times 2^3}{1-2^4} = \frac{-1\times 8}{1-16} = \frac{-8}{-15} = 0.53$$

$3 \times 0.53 \times 20 = 32$ نفر

$32 \times \frac{60}{100} = 19.2$ سیستم ترک می‌کنند

$19.2 \times 700 = 1344$ تومان

$8 \times 8 = 64$ هزینه اضافه روزی هر کارمند تومان

$1344 \div 64 = 21$ کارمند اضافه شوند

۳۸   22 کارمند

شرکت هواپیمایی ...   M/M/3/3

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{3!}{(3-n)!\,n!} \times 2^n + \sum_{n=3}^{3} \frac{3!}{(3-n)!\times 3^{n-3}\times 6} \times 2^n\right]^{-1}$$

$$P_0 = [1+6+12+8]^{-1} = 0/04$$

$$P_3 = \frac{3!}{3!\times 0!} \times 2^3 \times 0/04 = 0/32$$

$\lambda P_3 = 19/2$

$\lambda \times 0/32 \times 60 = 19/2$

$19/2 \times \frac{60}{100} = 11/52$

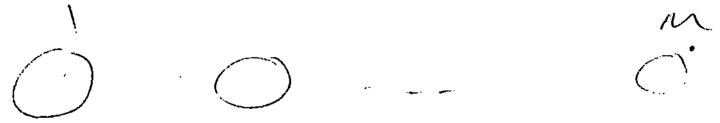
$11/52 \times 70 = 806/4$ نفر

$(1344 - 806/4) = 537/6$ صرفه‌جویی

$2 \times 64 = 128$ هزینه اضافه

۹

گره ای سرویس (صف ها)



$P_{ir,js}$

i: سرویس i ام

r: برنامه از دسته r-ام

j: سرویس گره j ام

s: برنامه از دسته s-ام

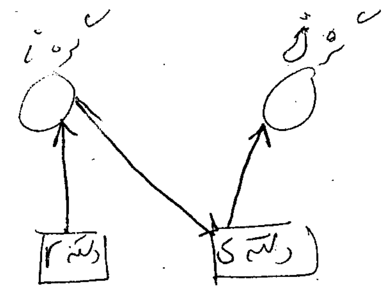
$P_{ir,0}$

i: سرویس گره i ام

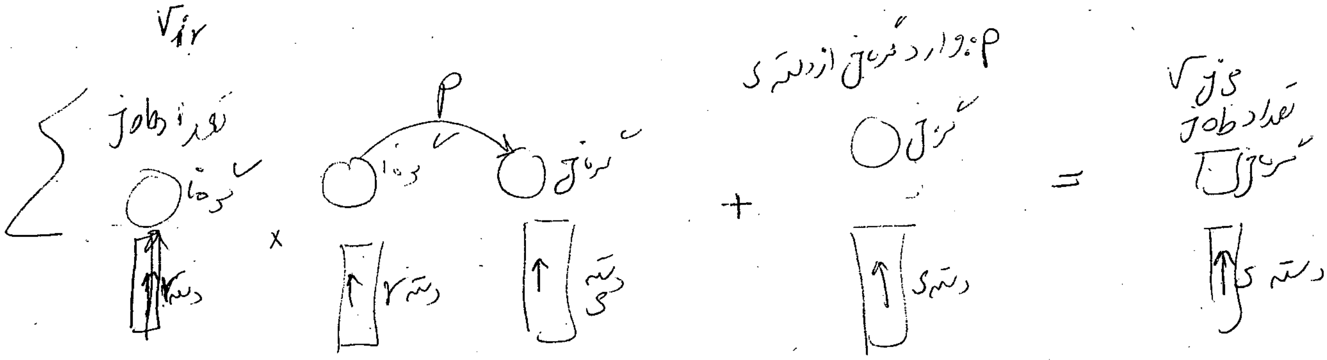
r: برنامه از دسته r-ام

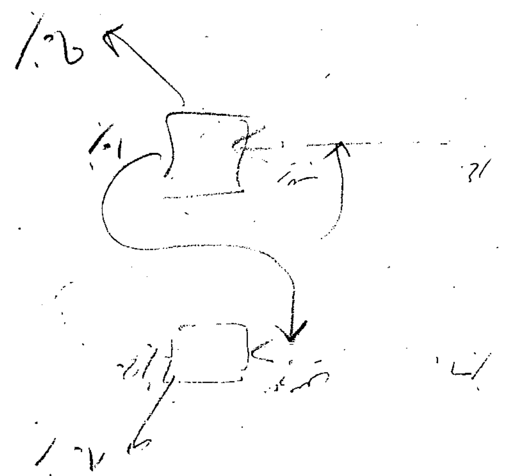
0: ترک

$P_{0,ir}$: برنامه از دسته r ام به گره i-ام وارد میشه



V_{ir}: تعداد دفعاتی که یک job از دسته r ام گره i ام را ملاقات میکند.





مدل صف با ظرفیت محدود

$M/M/1/K$

حداکثر تعداد مشتری در سیستم

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & n \geq K \end{cases}$$

در حالت K ام دیگه ورودی نمیپذیره

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & n = 1, 2, \dots, K \\ K & n < 0 \end{cases} \qquad R_n = \Bigg\{$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \rho^n} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \Rightarrow \mu \neq \lambda \text{ اگر } \qquad P_0 = \frac{1}{K+1} = P_n \quad , n = 1, \dots K$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} , & \lambda \neq \mu \quad , n = 0, 1, \dots, K \\[2ex] \dfrac{1}{K+1} , & \lambda = \mu \quad , n = 0, 1, \dots K \end{cases}$$

اگر $\lambda < \mu$ و $K = \infty$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

متوسط تعداد مشتری در سیستم

$$L = E(N) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{[K+1]\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} , & \lambda \neq \mu \\[2ex] \dfrac{K}{2} , & \lambda = \mu \end{cases}$$

میانگین تعداد مشتری در صف

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

احتمال نبودن مشتری در سیستم

$$W(t) = P(W \leq t) = \cancel{\sum_{K=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^K}{K!}} \leq P(\mu t, n) = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \underbrace{P(\mu t, n)}$$

$$W_q(t) = P(q \leq t) = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} P(\mu t, n)$$

$$P(\mu t, n) = \sum_{K=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^K}{K!}$$

$$q_n = \frac{P_n}{1-P_K}$$

اگر وضعیت سیستم $n(t)=n$ تعداد مشتریان در زمان t برابر n است

میانگین نرخ ورود

ورودی اول ————— ورود دوم

میانگین نرخ خروج

خروج اول ————— خروج دوم

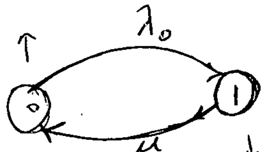
مدت زمان بین دو ورود ← توزیع نمایی با پارامتر λ_n ، $n=0,1,2,\dots$

مدت زمان بین دو خروج ← توزیع نمایی ← μ_n ، $n=1,2,\dots$

P_n ← احتمال اینکه سیستم در وضعیت n باشد.

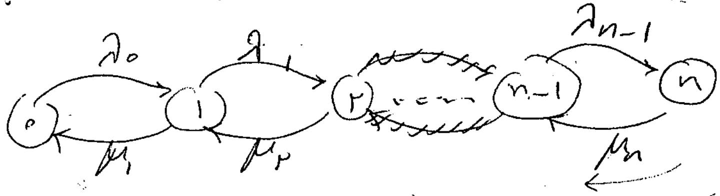
اصل: نرخ خروج = نرخ ورود ← وضعیت یکنواخت سیستم

$P_0\lambda_0$ = میانگین نرخ خروج از وضعیت صفر



$P_1\mu_1$ = میانگین نرخ ورود به وضعیت صفر

معادله تعادل برای وضعیت صفر $\Rightarrow P_1\mu_1 = P_0\lambda_0$



$$R_n = \frac{\lambda_{n-1}\,\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\,\lambda_0}{\mu_n\,\mu_{n-1}\cdots\mu_2\,\mu_1}$$

احتمال اینکه سیستم در وضعیت n باشد $P_n = R_n P_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 + P_1 + \dots P_n = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} R_n}$$

$\boxed{M/M/1}$ مدل

$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$

شرط ایستایی و پایداری صف $\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$

$\boxed{P_n = \rho^n P_0}$ $\qquad P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n} \Rightarrow \boxed{P_0 = 1-\rho}$

$\boxed{P_n = \rho^n(1-\rho)}$

متوسط تعداد مشتری در سیستم $E(N)$: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

متوسط تعداد مشتری در صف انتظار $E_q(N)$: $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

میانگین مدت انتظار در سیستم $E(W)$: $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{L}{\lambda}$

متوسط زمان انتظار در سرویس (زمان پاسخ) $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{E(S)}{1-\rho}$

میانگین مدت انتظار در صف $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ $\qquad E_q(W)$: $W_q = W - E(S) = \frac{\rho E(S)}{1-\rho}$

مدت زمان انتظار در سیستم و حداکثر در زمان t $\qquad W(t) = P[W \leq t] = 1 - e^{-t/W}$

مدت زمان انتظار در صف در زمان t $\qquad W_q(t) = P(q \leq t) = 1 - \rho e^{-t/W}$

$\lambda = \frac{1}{E(t)}$ میانگین ورود به سیستم $\qquad \mu = \frac{1}{E(S)}$ میانگین زمان سرویس

M/M/C

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} & n \le c \\[2ex] \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!\,c^{n-c}} & n > c \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}}$$

$$p_n = R_n p_0 = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 & n \le c \\[2ex] \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!\,c^{n-c}} p_0 & n > c \end{cases}$$

$$L_q = \frac{\dfrac{p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}{c}}{c!(1-\rho)^2} \qquad \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

کتاب موسوی ص ۱۸ صف تا مثال دیگر

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$w = w_q + E(s) = w_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda w$$

M/M/C/K

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} & n < c \\[2ex] \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!\,c^{n-c}} & c \le n \le k \end{cases}$$

برای $n > K$ ، ۰

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 & n < c \\[2ex] \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!\,c^{n-c}} p_0 & c \le n \le k \end{cases}$$

$P_n = 0$ برای $n > K$

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{1-(\frac{\lambda}{c\mu})^{k-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}} & \rho \ne 1 \\[4ex] \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} (k-c+1)} & \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = \frac{p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \left(1 - \rho^{k-c} - (k-c)\rho^{k-c}(1-\rho)\right) \quad 1$$

$$L = L_q + c - p_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c-n)(\rho c)^n}{n!}$$

$$w = \frac{L}{\lambda(1-p_k)} \quad 4$$

$$w_q = w - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_k)} \quad 2$$

3

وقتی c بزرگ است
اگر به ترتیب نوشته شده
مقادیر را بدست آوریم
ها را بدون استفاده
از فرمول می‌توان بدست آورد

مثال ۴-۲ ص ۵۳

۱- متوسط تعداد پیغام در سیستم :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۴}{\frac{1}{۰/۲۲}} = ۰/۸۸$$

$$\mu = ۴/۵۴$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{[K+1]\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$① \; L = \frac{۰/۸۸}{۱-۰/۸۸} - \frac{(۲۶+۱)(۰/۸۸)^{۲۶+۱}}{۱-(۰/۸۸)^{۲۶+۱}} = ۷/۳۳ - \frac{۰/۸۵۵}{۰/۹۶۸} = ۶/۴۴$$

$$② \; L_q = L - (1 - P_0) = ۶/۴۴ - (۱ - ۰/۱۲۴) = ۵/۵۶۴$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{۱-۰/۸۸}{۱-(۰/۸۸)^{۲۷}} = \frac{۰/۱۲}{۰/۹۶۸} = ۰/۱۲۴$$

$$③ \; W = E(W) = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{۶/۴۴}{۳/۹۸} = ۱/۶۱$$

$$④ \; W_q = E_q(W) = \frac{L_q}{\lambda_a} = \frac{۵/۵۶۴}{۳/۹۸} = ۱/۳۹ \text{ [illegible]}$$

$$\lambda_a = \lambda(1 - P_K) = ۴(۱ - ۰/۰۰۴۴) = ۳/۹۸$$

$$P_K \rightarrow P_{۲۶}$$

$$P_K = ۰/۰۰۴۴$$

$$W(t) = P(W \leq ۲/۵) = 1 - \sum_{n=0}^{۲۴-۱} q_n P[۴/۵۴ \times ۲/۵, n]$$

$$P[۴/۵۴ \times ۲/۵, n] = P[۱۱/۳۵, n] = \sum_{K=0}^{n} e^{-۱۱/۳۵} \frac{(۱۱/۳۵)^{۲۴}}{۲۶!}$$

$$q_n = \frac{P_n}{1 - P_K}$$

مقدار r-امین درصد π(r)

$$p(x \le \pi(r)) = \frac{r}{100}$$

$$\pi(r) = E(x)Ln(\frac{100}{100-r})$$

فرمولهای لیتل:

$$L = \lambda w$$

$$L_q = \lambda w_q$$

$$w = w_q + \frac{1}{\mu}$$

M/M/1

$$R_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$$

$$p_0 = 1-\rho$$

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad L - L_q = \rho$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{E(s)}{1-\rho}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = w - E(s) = \frac{\rho E(s)}{1-\rho}$$

[illegible] $w(t) = p(w \le t) = 1 - e^{-\frac{t}{w}}$

[illegible] $w_q(t) = p(q \le t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = 1 - \rho e^{[illegible]}$

$$L'_q = E(N_q \mid N_q \ne 0) = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

در صورت خالی نبودن صف

M/M/1/K

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \qquad \lambda \ne \mu$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \lambda \ne \mu \\ \dfrac{1}{k+1} & \lambda = \mu \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \lambda \ne \mu \\ \dfrac{k}{2} & \lambda = \mu \end{cases}$$

$$L_q = L - (1-p_0)$$

$$w = \frac{L}{\lambda_\alpha}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda_\alpha}$$

$\lambda_\alpha = \lambda(1-p_k)$ نرخ ورود در واقع مشتریانی که واقعاً موفق می‌شوند وارد صف شوند

$\lambda_\beta = \lambda p_k$ نرخ مشتریانی که موفق نمی‌شوند وارد صف شوند

$w(t)$ Book (53)

M/M/∞

$$p_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$w = \frac{1}{\mu}$$

M/M/1/K/K

$$R_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n & 0 < n \le k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

$$p_n = \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-p_0)$$

$$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0)$$

$$w = \frac{L}{\lambda_\alpha}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda(N-L)$$

M/M/C/K/K

$$R_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n & 0 \le n \le c \\ \frac{N!}{(N-n)!c^{n-c}c!}(\frac{\lambda}{\mu})^n & c < n \le k \\ 0 & n > N \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{N!}{(N-n)!n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n + \sum_{n=c}^{N} \frac{N!}{(N-n)!c^{n-c}c!}(\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

$$L = p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} n\binom{N}{n}(\frac{\lambda}{\mu})^n + \frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{N} n\binom{N}{n}\frac{n!}{c^{n-c}}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right)$$

$$L_q = L - c + p_0 \sum_{n=0}^{c-1}(c-n)\binom{N}{n}(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

$$w = \frac{L}{\lambda(N-L)}$$

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda(N-L)}$$

$$p_{n+1} = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1}(\frac{\lambda}{\mu})p_n & 0 \le n \le c-1 \\ \frac{N-n}{c}(\frac{\lambda}{\mu})p_n & c-1 \le n \le N-1 \end{cases}$$

(متوسط زمان انجام کار) / (متوسط زمان از کار افتادگی) = $\frac{w}{(\frac{1}{\lambda})} = \lambda w$

نسبت متوسط تعداد از کار افتاده بر
متوسط تعداد در حال کار

$\Rightarrow M/M/1/\overset{K}{6}/\overset{K}{6}$ مثال ۱۴ ـ ۵ ص ۶۳

$$L_q = \sum_{n=1}^{K} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{6} (n-1)P_n = P_2 + 2P_3 + 3P_4 + 4P_5 + 5P_6$$

$$P_n = \frac{K!}{(K-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$ مثلاً $$P_2 = \frac{6!}{(6-2)!} P_0 \left(\frac{\frac{1}{30\times 60}}{\frac{1}{1800\times 60}}\right)$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{(K-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=0}^{6} \frac{6!}{(6-n)!}\left(\frac{1800}{30}\right)^n\right]^{-1}$$

$$L = K - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) = 6 - \frac{1800}{30}(1-P_0)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_\alpha} \qquad \lambda_\alpha = \lambda(K-L) = \frac{1}{30\times 60}(6-L)$$

با ارزیابی این مشتق در نقطه صفر خواهیم داشت:

$$E\left[T_{\text{مشغول}}\right] = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

زیاد مشکل نخواهد بود که اصطلاح دوره مشغول را از لحاظ مفهومی برای مورد چند کاناله گسترش داد. به خاطر آورید که برای یک کانال، دوره مشغول چنین تعریف می‌شود که با ورود یک مشتری به یک کانال بیکار شروع شده و با بیکار شدن مجدد کانال ختم می‌شود. با شیوه مشابهی، بگذارید دوره مشغول i کانال را برای $M/M/c$ $(0\le i\le c)$، چنین تعریف کنیم که با ورود یک مشتری به سیستم در لحظه‌ای که $i-1$ نفر در سیستم وجود دارد شروع شود، و در لحظه‌ای که مجدداً اندازه سیستم به $i-1$ نفر می‌رسد ختم شود. بگذارید اظهار کنیم موردی که $i=1$ است (ورود به یک سیستم خالی) دوره مشغول سیستم را تعریف کند. با شیوه‌ای مشابه مورد $M/M/1$، $T_{b,i}$ را به کار می‌بریم تا دلالت بر متغیر تصادفی "طول پریود مشغول i کانال" کند. سپس CDF مربوط به $T_{b,i}$ با بررسی معادلات دیفرانسیل ـ دیفرانس $M/M/c$ اصلی (۲-۲) و نهادن حائل جذب‌کننده بر روی اندازه سیستم $i-1$ و اندازه اولیه i، تعیین می‌شود. از این رو باید واضح باشد که در حقیقت CDF مورد نیاز $p_{i-1}(t)$ است و $p'_{i-1}(t)=\frac{dp_{i-1}(t)}{dt}$ چگالی آن خواهد بود. معادلات لازم خواهند بود:

$$\begin{cases} p'_{i-1}(t) = i\mu p_i(t) & \text{[به علت حائل جذب‌کننده]} \\ p'_i(t) = -(\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t) & \text{[به علت حائل جذب‌کننده]} \\ p'_n(t) = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) & (i < n < c) \\ p'_n(t) = -(\lambda + c\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + c\mu p_{n+1}(t) & (n \ge c) \end{cases}$$

ادامه شیوه مربوط به $M/M/1$ در این مرحله ما را با جزئیات جبری زیادی مواجه خواهد ساخت. کافی است بیان کنیم که تمامی CDFهای حاصله بر حسب توابع بسل اصلاح شده خواهند بود، لیکن با صرف وقت کافی و داشتن حوصله، $p'_{i-1}(t)$، $\bar{p}_{i-1}(s)$، و $E[T_{b,i}]$ را می‌توان به دست آورد.

مسائل فصل دوم

(۲-۱) سطر دوم معادله (۲-۴a) را با استفاده از تعادل احتمالی به دست آورید:

(۲-۲) قدمهای منجر به معادلات (۲-۵) را (الف) با استفاده از رابطه (۲-۴) و (ب) با استفاده از نتیجه تعادل مشروح $\lambda p_n=\mu p_{n+1}$ را تهیه و ارائه کنید.

(۲-۳) برای توابع مولد زیر (لزوماً توابع مولد احتمالی نیستند) ترتیب تولید آنها را بنویسید:

(الف) $G(z) = 1/(1-z)$

(ب) $G(z) = z/(1-z)$

(پ) $G(z) = e^z$

(۲-۴) نشان دهید که تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، مساوی با حاصلضرب توابع مولد گشتاور مربوط به تک تک متغیرهای تصادفی است.

(۲-۵) با استفاده از نتیجه مسئله (۲-۴) نشان دهید که:

(الف) مجموع دو متغیر تصادفی پواسان مستقل، یک متغیر تصادفی پواسان است.

(ب) مجموع دو متغیر تصادفی نمایی مستقل و یکسان، دارای توزیع گاما است.

(پ) مجموع دو متغیر تصادفی نرمال مستقل، یک متغیر تصادفی نرمال است.

(۲-۶) با استفاده از روش اپراتورها، معادله دیفرانس

$$p_{n+4} - 10p_{n+3} + 35p_{n+2} - 50p_{n+1} + 24p_n = 0,$$

را با توجه به $p_0=0$، $p_1=1$، $p_2=0$، و $p_3=1$ حل کنید.

(۲-۷) سؤالات زیر را درباره توزیع ترکیبی زمان انتظار در صف $w_q(t)$ برای یک مدل $M/M/1$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $w_q(t)$ از معیار قابلیت جمع به واحد[1] یک توزیع احتمالی معتبر پیروی می‌کند.

(ب) مطلوب است تعیین $E[T_q|T_q>0]$، یعنی، ارزش انتظاری زمانی که یک فرد باید در صف منتظر بماند، به شرط اینکه کلاً ناچار است منتظر بماند.

1- Summability-to-one.

(۲-۸) $w(t)$ و W (چگالی زمان انتظار کل و ارزش انتظاری آن) را که به وسیله معادلات (۲-۳۱) و (۲-۳۲) داده شده‌اند به دست آورید.

(۲-۹) معادله (۱-۱) برای هر سیستم صف معتبر است و به وسیله راس (*Ross-1970*) برای اثبات فرمول لیتل برای صف $G/G/1$ به طریقی متفاوت از آنچه که در قسمت (۲-۲-۵) دیدیم، به کار رفته است. رویه وی عبارت است از ترسیم شمارش جمعی ورودی‌ها روی یک گراف در مقابل شمارش جمعی خروجی‌ها. آنگاه می‌توان ملاحظه کرد که سطح بین این دو تابع پله‌ای از آغاز یک دوره مشغول تا آغاز دوره مشغول بعدی (یک سیکل مشغول) مجموع زمانهای انتظار کل تمامی مشتریانی است که در طول این سیکل مشغول وارد سیستم شده‌اند. با استفاده از این بحث، یک بیان تجربی از فرمول لیتل در طول یک سیکل مشغول به دست آورید.

(۲-۱۰) تأثیر دو برابر کردن λ و μ بر L، L_q، و W در یک مدل $M/M/1$ چیست؟

(۲-۱۱) یک معاون پژوهشی فارغ التحصیلان در پیشخوان سفارشات کوتاه در طول ساعات کارش، تنها مسئول پیشخوان است. به نظر می‌رسد که ورودی‌هایی که به پیشخوان می‌آیند از توزیع پواسان با میانگین ۱۰ نفر در ساعت پیروی می‌کنند. در هر زمان یک مشتری سرویس می‌شود و زمان سرویس از توابع نمایی با میانگین ۴ دقیقه پیروی می‌کند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) احتمال داشتن صف چقدر است؟

(ب) طول متوسط صف چقدر است؟

(پ) متوسط زمانی که یک مشتری در سیستم صرف می‌کند، چقدر است؟

(ت) احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه در صف صرف کند، قبل از اینکه پیشخدمت به او برسد، چقدر است؟

(ث) معاون مذکور می‌خواهد اوقات بیکاری خود را صرف درجه‌بندی مقالات کند. اگر او بتواند به طور متوسط ۲۲ مقاله را در یک ساعت درجه‌بندی نماید، به طور متوسط در حین انجام شیفت کاری خود، چند مقاله را در یک ساعت می‌تواند معدل بگیرد؟

(۲-۱۲) امکانات تعمیرات و نگهداری کرایه اتومبیل دارای توانایی‌های تعمیرات و نگهداری معمولی (تعویض روغن، روغنکاری، تنظیم موتور، شست و شو، و غیره) برای تنها یک اتومبیل در یک زمان است. اتومبیلها برای این تعمیرات و نگهداری معمولی مطابق فرآیند پواسان با نرخ میانگین سه اتومبیل در روز وارد می‌شوند و زمان سرویس برای انجام این تعمیرات، دارای توزیع‌نمایی با میانگین $\frac{۷}{۲۴}$ روز است. هزینه ثابت کارکرد تجهیزات شرکت ۷۵ دلار در روز است. شرکت برآورد کرده است که برای هر اتومبیل که هر روز در کارگاه بماند، ۵ دلار در روز سود از دست می‌دهد. شرکت با تغییر روشهای خاص و استخدام مکانیک‌های چابک‌تر، می‌تواند متوسط زمان سرویس را به $\frac{۱}{۴}$ روز تقلیل دهد، البته در این صورت هزینه‌های کارکرد افزایش خواهند یافت. هزینه‌های کارکرد تا چه مقداری می‌توانند افزایش یابند، پیش از آنکه، دیگر از لحاظ اقتصادی، انجام تغییر قابل قبول نباشد.

(۲-۱۳) قبل از آنکه قطعات مونتاژ شده به صورت یک محصول کامل درآید، باید رنگ‌آمیزی شوند. مرکز رنگ از یک دستگاه رنگ اتوماتیک تشکیل شده و قطعات به صورت تصادفی و فرآیند پواسان با میانگین نرخ λ در هر ساعت وارد این مرکز می‌شوند. مشاهده شده است که میانگین زمان سرویس فرایند رنگ‌کاری $1/\mu$ ساعت با توزیع‌نمایی است. تخمین زده می‌شود که شرکت برای هر واحد محصول به ازای هر ساعتی که محصول در مرکز رنگ معطل بماند، حدوداً C_1 دلار پرداخت خواهد کرد. هزینه عملیاتی دستگاه رنگ قطعاً تابعی از سرعت عملیات دستگاه است، و به خصوص، موقعی که دستگاه با میانگین نرخ μ کار می‌کند، دارای نرخ هزینه μC_2 دلار در هر ساعت خواهد بود، خواه دستگاه همواره در حال کار باشد یا نباشد. μ چه اندازه باید بزرگ باشد تا به شرکت اجازه دهد که هزینه عملیات رنگ‌کاری را حداقل کند؟

(۲-۱۴) در یک سیستم $M/M/c/\infty$ احتمال اینکه به ازای $k \geq c$ تعداد k یا بیشتر در سیستم باشند، را تعیین کنید.

(۲-۱۵) برای مدل $M/M/c/\infty$، عبارتی برای p_n بر حسب p_c (به جای p_0) ارائه کنید و سپس L_q و $W_q(t)$ را بر حسب ρ و p_c به دست آورید.

(۲-۱۶) (الف) برای مدل $M/M/c/\infty$ با استفاده از بحث ارزش انتظاری، نشان دهید

که $L=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$ است.

(راهنمایی: بگذارید N بیانگر متغیر تصادفی "تعداد در سیستم" و N_q متغیر تصادفی "تعداد در صف" باشد. سپس داریم $N_q=N-N$ وقتی که $N<c$ است و $N_q=N-c$ وقتی که N بزرگتر یا مساوی c است. حالا با استفاده از معادلات (۲-۴۱) و (۲-۴۳) نتیجه مطلوب را اثبات کنید).

(ب) نشان دهید که ارزش انتظاری تعداد سرویس کنندگان مشغول برای هر صف $G/G/c$ برابر $\frac{\lambda}{\mu}$ است (راهنمایی: از فرمول لیتل استفاده کنید).

(۲-۱۷) نشان دهید که محاسبه W_q با $\int_0^\infty t dW_q(t)$ برای مدل $M/M/c/\infty$ همان نتیجه‌ای را فراهم می‌سازد که به وسیله معادله (۲-۴۵) بیان شده است.

(۲-۱۸) برای مدل $M/M/c/\infty$، تابع چگالی شرطی $w_q(t|t>0)$، یعنی، چگالی زمان انتظار در صف را برای کسانی که[1] مجبورند منتظر بمانند به دست آورید. همچنین ارزش انتظاری انتظار در صف را برای کسانی که منتظر مانده‌اند، پیدا کنید.

(۲-۱۹) برای مدل $M/M/c/\infty$، $w(t)$ تابع چگالی زمان کل صرف شده در سیستم را به دست آورید و با استفاده از آن W را محاسبه و نتیجه خود را با معادله (۲-۴۶) کنترل کنید. (راهنمایی: اگر از رویه به دست آوردن $CDF\ W(t)$ استفاده شود، باید دو حالت در نظر گرفته شود، یکی موقعی که کمتر از c در سیستم است و یک ورودی بلافاصله می‌تواند وارذ سرویس شود و دیگری موقعی که c یا بیشتر در سیستم باشند. برای مورد اخیر، کان ولوشن‌ای از یک ارلنگ و یک نمایی مورد نیاز است، که کاملاً مشکل است. در اینجاراحت‌تر است که $w(t)$ رامستقیماً به‌وسیله $w(t)dt \doteq Pr\{t \le T \le t+dt\}$ و تشخیص اینکه احتمال یک سرویس در dt برابر μdt است، به دست آوریم).

(۲-۲۰) نشان دهید که برای یک مدل $M/M/c$ احتمال اینکه سرویس کننده‌ای مشغول باشد، برابر $\lambda/c\mu$ است.

(۲-۲۱) معاونت بازرسی در امور ایمنی و بازرسی، برنامه رسیدگی وگزارش حوادث نیروی هوایی را اداره می‌کند. ۲۵ تیم رسیدگی برای تجزیه و تحلیل و ارزیابی هر حادثه تشکیل شده است تا اطمینان حاصل شود که به گونه مناسبی به هیئتهای رسیدگی به حوادث، گزارش شده است. هر یک از این تیمها به محض اینکه احتیاجات پشتیبانی فراهم شود به محل حادثه اعزام می‌شوند. پشتیبانی تنها شامل کسانی می‌شود که امکانات و پرسنل واجد شرایط ندارند تا چنین سرویس‌هایی را هدایت کنند. هر حادثه به یک تیم نیاز دارد که به مقدار تصادفی از زمان که ظاهراً نمایی با میانگین ۳ هفته است، اعزام می‌شوند. احتیاجات پشتیبانی از اداره معاونت کل بازرسی به صورت فرایند پواسان با نرخ میانگین ۳۴۷ در سال دریافت می‌شوند. در هر زمان داده شده، دو تیم به علت مرخصی پرسنل، بیماری، و غیره در دسترس نیست. ارزش انتظاری زمانی که در یک حادثه (انتظار برای ارزیابی) صرف می‌شود، تعیین کنید.

(۲-۲۲) سازمانی درگیر تأسیس یک مرکز ارتباط تلفنی است، به طوریکه توانایی صدور پیام آن سریعتر باشد. به طور کلی، مرکز مسئول انتقال پیامهای صادره است و باید پیامهای وارده را نیز دریافت و توزیع کند. در حال حاضر هدف اصلی مدیر مرکز این است که تعداد پرسنل انتقال دهنده مورد نیاز در مرکز جدید را بداند. انتقال دهنده‌های پیامهای صادره مسئول انجام تصمیمات جزئی در پیامها، تخصیص اعداد وقتی که از شکلهای پیام اصلی دورند، تعمیر و نگهداری شاخص کدها، فایل ۳۰ روزه از پیامهای صادره، و انتقال واقعی پیام هستند. از قبل معلوم شده است که این فرایند نمایی بوده و زمان پردازش به طور متوسط ۲۸ دقیقه برای هر پیام است. پرسنل انتقال ۷ ساعت در روز و ۵ روز در هفته در این مرکز کار خواهند کرد. تمامی پیامهای صادره به ترتیب دریافت مورد پردازش قرار می‌گیرند و از فرایند پواسان با نرخ میانگین $\frac{۲۱}{\text{۷ساعت-روز}}$ پیروی می‌کنند. پردازش پیامهای مستلزم انتقال باید به طور متوسط ظرف ۲ ساعت از زمان ورود آنها به مرکز شروع شود. تعداد حداقل پرسنل انتقال دهنده برای انجام این معیار سرویس را تعیین کنید. اگر معیار سرویس به این صورت تعریف شود که احتمال اینکه پیام برای شروع انتقال بیش از ۳ ساعت منتظر بماند کمتر از ۵٪ باشد، چند نفر برای انتقال پیامها مورد نیاز خواهد بود؟

(۲-۲۳) بانک کوچکی دارای دو متصدی یکی برای دریافت وجه و دیگری برای پرداخت وجه است. مشتریان مطابق توزیع پواسان با میانگین ۲۰ نفر در ساعت به هر یک از

متصدیان مراجعه کنند. (نرخ ورودی میانگین کل به بانک ۴۰ نفر در ساعت است). زمان سرویس هر یک از متصدیان نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. مدیر بانک مسئله تغییر روش را بررسی می‌کند، به طوری که هر یک از متصدیان بتوانند هم پرداخت کنند و هم سپرده‌ها را بپذیرند تا از موقعیتهایی که گهگاه پیش می‌آید که صف در جلوی یکی از باجه‌ها تشکیل می‌شود در حالی که باجه دیگر بیکار است، اجتناب شود. به هر حال، از آنجا که متصدیان مجبورند هم سپرده‌ها را بپذیرند و هم وجوه را پرداخت کنند، بازدهی آنها کاهش می‌یابد و میانگین زمان سرویس ۲/۴ دقیقه خواهد شد. سیستم فعلی را با سیستم پیشنهادی با توجه به ارزش انتظاری تعداد کل افراد در بانک، زمان مورد انتظار که یک مشتری باید در بانک صرف کند، احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند، و زمان بیکاری متوسط متصدیان باجه‌ها مقایسه کنید.

(۲-۲۴) شرکت هات توترات[1] باید بین کارکرد یکی از دو نوع کارگاههای سرویس برای تعمیر و نگهداری کامیونهایش انتخاب کند. برآورده شده است که کامیونها مطابق توزیع پواسان با نرخ میانگین یکی در هر ۴۰ دقیقه وارد امکانات تعمیر و نگهداری خواهند شد و احساس می‌شود که این نرخ مستقل از نوع امکان انتخاب شده می‌باشد. در نوع اول کارگاه، دو امکان به طور موازی کار می‌کنند و هر یک از این امکانات می‌توانند به یک کامیون به طور متوسط در ۳۰ دقیقه سرویس ارائه کنند (زمان سرویس از توزیع نمایی پیروی می‌کند). در نوع دوم، تنها یک امکان وجود دارد، لیکن می‌تواند به طور متوسط در ۱۵ دقیقه یک کامیون را سرویس کند (زمانهای سرویس در این حالت نیز نمایی‌اند). به منظور کمک به مدیریت در تصمیم‌گیری، از تحلیلگر تحقیق در عملیات، آقای سی. رف تی[2] خواسته شده است که به سؤالات زیر پاسخ دهد:

(الف) به طور متوسط چند کامیون در هر یک از دو نوع امکانات خواهد بود؟

1- *Hott Too Trott.*

2- *C. Raf Tee.*

(ب) به طور متوسط، یک کامیون چه مدت در هر یک از دو نوع امکانات صرف خواهد کرد؟

(پ) مدیریت محاسبه کرده است که هر دقیقه که یک کامیون در کارگاه صرف کند، سهم سود را به اندازه دو دلار کم می‌کند. همچنین تجارب قبلی در زمینه کارکرد کارگاههایی با دو امکان نشان داده که هزینه عملیاتی چنین امکانی یک دلار در دقیقه است (شامل کارگر، سربار، و غیره). هزینه عملیاتی در هر دقیقه برای کارکرد نوع دوم (تنها یک امکان) چقدر باشد تا اختلافی بین دو نوع کارگاه موجود نباشد؟

(۲-۲۵) شرکت کامپوتر[1] که تجهیزات پردازش داده الکترونیک (EDP) را اجاره می‌دهد، نیاز به تعمیرات اساسی تجهیزات خود را یک بار در سال در نظر می‌گیرد. طرح ۱ تهیه دو ایستگاه تعمیر و نگهداری جداگانه است که در آن تمام کار با دست انجام می‌شود (یک ماشین در یک زمان) و هزینه سالانه کل آن ۱۵۰۰۰۰ دلار است. زمان تعمیرات و نگهداری برای یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۶ ساعت است. طرح ۲ تهیه یک ایستگاه تعمیر و نگهداری با تجهیزات اکثراً اتوماتیک است و هزینه سالانه آن ۲۰۰۰۰۰ دلار است. در این حالت، زمان تعمیر برای یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت است. در مورد هر دو طرح، ماشینها مطابق توزیع پواسان با نرخ ورود میانگین یکی در هر ۸ ساعت وارد می‌شوند (نظر به اینکه شرکت تعداد زیادی از این ماشینها را اجاره می‌دهد، جمعیت ماشین را نامحدود در نظر می‌گیریم). هزینه زمان بیکاری هر ماشین ۳۰ دلار در ساعت است. شرکت باید کدام طرح را انتخاب کند؟ فرض کنید امکانات تعمیر و نگهداری همواره باز باشد و ۸۷۶۰ = (۳۶۵)(۲۴) ساعت در سال کار می‌کنند.

(۲-۲۶) نشان دهید که (الف) با ρ یکسان، $M/M/1/\infty$ نسبت به L همواره بهتر از $M/M/2/\infty$ خواهد بود و (ب) اینکه یک مدل $M/M/2/\infty$ همواره بهتر از دو صف $M/M/1/\infty$ مستقل با نرخ سرویس یکسان است که هر یک نیمی از ورودیها را داشته باشند.

(۲-۲۷) برای مدل $M/M/c/K$ نشان دهید که گرفتن حد p_n و p_0 وقتی که $K\to\infty$ و محدود

1- *Compewter.*

کردن $\lambda/c\mu<1$ در معادلات (۲-۵۳) و (۲-۵۴)، نتایج مدل $M/M/c/\infty$ راکه با معادلات (۲-۴۱) و (۲-۴۳) بیان شده‌اند، ارائه می‌دهد.

(۲-۲۸) با استفاده از معادلات (۲-۵۴)، (۲-۵۶)، و (۲-۵۷) نشان دهید که معادلات (۲-۵۸) و (۲-۵۹) نتایج یکسانی ارائه می‌کنند، یعنی، $L-L_q=\frac{\lambda'}{\mu}$ است.

(۲-۲۹) نشان دهید که معادلات (۲-۵۳) تا (۲-۵۶) مدل $M/M/c/K$ در ازای $c=1$ به معادلات (۲-۶۰) تا (۲-۶۳) مربوط به $M/M/1/K$ ساده می‌شوند.

(۲-۳۰) نشان دهید که دو عبارت نرخ ورود میانگین مؤثر λ'، در مدل $M/M/1/K$، مساوی‌اند، یعنی، $\lambda(1-p_k)=\mu(L-L_q)$ است.

(۲-۳۱) مطلوب است تعیین احتمال اینکه انتظار یک مشتری در صف $M/M/1/3$ با $\lambda=۴$/ساعت و $1/\mu=۱۵$ دقیقه، بیش از ۲۰ دقیقه باشد.

(۲-۳۲) یک کارگاه کوچک شست و شوی اتومبیل که در آن تا وقتی که کار اتومبیل جلویی به طور کامل پایان نپذیرد اتومبیل بعدی نمی‌تواند وارد شود، دارای ظرفیت نگهداری حداکثر ۱۰ اتومبیل در محوطه خود است (شامل یکی که در دستگاه شست و شو است). شرکت دریافته است که ورودیها پواسان با نرخ میانگین ۲۰ اتومبیل در ساعت است و زمانهای سرویس نمایی با میانگین ۱۲ دقیقه است. تعداد متوسط اتومبیلهایی که به خاطر محدودیت ظرفیت در هر روز ۱۰ ساعته نمی‌توانند وارد کارگاه شوند، چقدر است؟

(۲-۳۳) تحت این فرض که اگر جایی برای نشستن نباشد مشتریان منتظر نخواهند ماند، آرایشگر کات می‌تواند در روزهای شنبه اطاق کنفرانس یک شرکت نرم‌افزار کامپیوتر کوچک راکه مجاور مغازه وی است به ۴ دلار اجاره کند (هزینه نظافت‌چی در روز شنبه). مغازه وی شنبه‌ها از ساعت ۸ صبح تا ۲ بعد از ظهر باز است و سود نهایی او ۲/۲۵ دلار از هر اصلاح است. در مغازه وی ۴ نفر دیگر می‌توانند بنشینند. آیا کات این اطاق را اجاره کند؟

(۲-۳۴) شرکت نفتی فولرهیر[1] عملیات تخلیه نفت خام در پالایشگاه اصلی را به عهده دارد.

1- Fowler-Hier.

بندر شش محل تخلیه و چهار تیم تخلیه‌کننده دارد. وقتی که تمام جایگاهها پر باشند، کشتی‌های وارده به طرف یک وسیله شناور در ۲۰ مایلی رودخانه هدایت می‌شوند. تانکرها مطابق فرایند پواسان با میانگین یکی در هر ۲ ساعت وارد می‌شوند. به طور متوسط ۱۰ ساعت طول می‌کشد تا یک تیم تخلیه تانکری را تخلیه کند، زمان تخلیه از توزیع نمایی پیروی می‌کند. تانکرهایی که منتظر تیم تخلیه کننده‌اند بر مبنای اولین وارده، اولین سرویس شده انتخاب می‌شوند. مدیر شرکت مایل است بداند:

(الف) به طور متوسط چند تانکر در بندر است؟

(ب) به طور متوسط یک تانکر چه زمانی را در بندر صرف می‌کند؟

(پ) نرخ ورود متوسط به وسیله شناور چقدر است؟

(ت) شرکت احداث محل تخلیه دیگری را در بندر اصلی در دست مطالعه دارد. برآورد شده است که هزینه‌های ساختمان و تعمیر و نگهداری X دلار در سال است. شرکت تخمین زده است که هدایت یک تانکر به بندر شناور موقعی که بندر اصلی پر است، دارای هزینه Y دلار است. رابطه بین X و Y چگونه باشد تا احداث محل تخلیه اضافی در بندر اصلی توجیه پذیر باشد؟

(۲-۳۵) شرکت هواپیمایی فلای بای نایت[1] دارای ارتباط تلفنی با سه خط است، که هر یک در طول پریودهای مشغول به یک متصدی مجهّز شده است. در طول اوج ۳ ساعت از پریود ۲۴ ساعتی، تماس گیرندگان بسیاری موفق به برقراری ارتباط نمی‌شوند (اگر همه سرویس کنندگان مشغول باشند، نمی‌توان تماس‌گیرندگان را نگهداشت). شرکت برآورد کرده است که به خاطر رقابت شدید، ۶۰ درصد تماس گیرندگان که موفق به برقراری تماس نمی‌شوند از شرکت هواپیمایی دیگری استفاده می‌کنند. اگر تعداد تماسها در طول این پریودهای اوج تقریباً پواسان با میانگین ۲۰ تماس در ساعت باشد و هر متصدی به طور متوسط ۶ دقیقه صرف هر تماس گیرنده کند، زمان سرویس تقریباً به طور نمایی توزیع شده باشد، و به طور متوسط هر مشتری ۷۰ دلار برای هر سفر بپردازد، زیان روزانه ناشی از محدودیت امکانات سرویس به طور متوسط چقدر

1- Fly-Bynite.

است؟ (می‌توان فرض کرد که تعداد افرادی که در طول ساعات غیر اوج از دست می‌روند قابل چشم‌پوشی است). اگر هزینه مزایا و دستمزد متصدی ۸ دلار در ساعت بوده و یک متصدی باید در یک شیفت ۸ ساعته کار کند، تعداد بهینه کارمندانی که باید استخدام کرد چند نفر است؟ سه ساعت اوج در طول شیفت ۸ ساعتی رخ می‌دهد. در تمامی ساعات دیگر، یک متصدی می‌تواند تمام ترافیک را عهده‌دار باشد و از آنجا که شرکت هیچ‌گاه مرکز مکالمات را تعطیل نمی‌کند، در خارج شیفت دقیقاً از یک متصدی استفاده می‌شود. فرض کنید که هزینه افزایش خطوط به مرکز مکالمه ناچیز باشد.

(۲-۳۶) نشان دهید که نتایج به دست آمده برای مدل سرویس کننده فراوان $(M/M/\infty)$ را همچنین می‌توان به وسیله گرفتن حد وقتی که $c\to\infty$ است از نتایج مدل $M/M/c/\infty$ به دست آورد.

(۲-۳۷) انجمن مکاتبه‌ای خوشنویسی یک دوره مکاتبه‌ای برای خوشنویسی به صورت خودآموز ارائه می‌کند. پذیرشهای جدید در هر زمان پذیرفته شده و درخواست‌کننده می‌تواند بلافاصله ثبت نام کند. یادداشتهای گذشته دلالت بر آن دارد که پذیرش‌ها از توزیع پواسان با میانگین ۸ نفر در ماه پیروی می‌کنند. میانگین زمان تکمیل یک درخواست‌کننده ۱۰ هفته است و توزیع زمانهای تکمیل نمایی‌اند. به طور متوسط، در هر زمان داده شده، چند "هنرآموز" در مدرسه ثبت نام کرده‌اند؟

(۲-۳۸) کاربردی از مدل $M/M/\infty$ در حیطه «کنترل موجودی» به شرح زیر است. سازنده یک کالای بسیار گران قیمت و با تقاضای نادر از سیاست کنترل موجودی زیر استفاده می‌کند. او ذخیره ایمنی S واحد در دسترس را حفظ می‌کند. تقاضای مشتری برای کالا به صورت فرایند پواسان با میانگین λ توصیف می‌شود. هر بار که تقاضای واحدی از محصول به عمل می‌آید (تقاضای یک مشتری) به کارخانه سفارش داده می‌شود تا محصول دیگری را تولید کند (این امر "سیاست سفارش دهی یک به یک"[1] نامیده می‌شود). زمان لازم برای تولید یک واحد محصول نمایی با میانگین $1/\mu$ است. هزینه

1- one-for-one.

نگهداری موجودی در قفسه h دلار برای یک واحد محصول برای یک واحد زمان که در قفسه می‌ماند، خواهد بود (نماینده هزینه سرمایه‌گرفتار در موجودی که می‌توانست سرمایه‌گذاری شود و سود عاید کند، هزینه‌های بیمه، خرابی محصول و غیره)، و هزینه کمبود موجودی p دلار برای هر واحد محصول (کمبود موجودی موقعی اتفاق می‌افتد که مشتری واحدی را درخواست می‌کند و کالا در قفسه نیست، یعنی ذخیره ایمنی به صفر رسیده است) است. فرض می‌شود که مشتریانی که خواهان واحدی هستند، اما ملاحظه می‌کنند که کالایی برای دسترسی فوری وجود ندارد، صبر می‌کنند تا اینکه موجودی از طریق سفارشهایی که داده شده است مهیا شود. (این امر سفارشهای عقب افتاده نامیده می‌شود)؛ بنابراین می‌توان هزینه p را به عنوان تخفیف به مشتری مورد توجه قرار داد، از این رو که مشتری برای تأمین تقاضایش معطل مانده است.

بنابراین مسئله یافتن مقدار بهینه S می‌شود که متوسط هزینه‌های کل را در واحد زمان حداقل کند؛ به عبارت دیگر، Sای جست‌وجو کرد که رابطه زیر را حداقل کند:

$$E[C] = h\sum_{z=1}^{S} zp(z) + p\lambda\sum_{z=-\infty}^{0} p(z) \qquad \text{[دلار در واحد زمان]}$$

که در آن z سطح موجودی در دست در حالت پایدار (+ نشان دهنده کالاهای در قفسه و - کالاهای عقب افتاده است) و $p(z)$ تابع فراوانی احتمال است. $\sum_{z=1}^{S} zp(z)$ متوسط مقدار ذخیره ایمنی و $\lambda\sum_{z=-\infty}^{0} p(z)$ متوسط تعداد سفارشهای عقب افتاده در واحد زمان است، زیرا $\sum_{z=-\infty}^{0} p(z)$ درصد زمانی است که هیچ ذخیره ایمنی در قفسه وجود ندارد و λ متوسط نرخ تقاضا است. اگر $p(z)$ را بتوان تعیین کرد، می‌توان $E(C)$ را نسبت به S بهینه کرد.

الف) رابطه بین Z و N را مشخص کنید، که در آن N دلالت بر تعداد سفارشهای در راه (یعنی تعداد سفارشهایی که در حال حاضر در کاخانه مورد فرایند قرار گرفته‌اند) می‌کند. در نتیجه $p(z)$ را به p_n ربط دهید.

(ب) نشان دهید که $\{p_n\}$ احتمالات حالت پایدار یک صف $M/M/\infty$ است، اگر

روش پردازش سفارش به عنوان سیستم صف مورد بررسی قرار گیرد. به وضوح بیان کنید که مکانیزمهای ورودی و سرویس چه هستند.

(پ) مقدار بهینه S را به ازای ماه/واحد $\lambda=۸$، روز $1/\mu=۳$، (نگهداری شده ماه/واحد/دلار $h=۵۰$، و واحد تأخیر شده در سفارش / دلار $p=۵۰۰$ به دست آورید.

(۲-۳۹) نشان دهید که معادله (۲-۷۵) نرخهای ورودی میانگین مؤثر λ'، را برای مدلهای زیر به دست می‌دهد:

(الف) $\lambda' = \lambda$, $M/M/1/\infty$, $M/M/c/\infty$

(ب) $\lambda' = \lambda\,(1-p_k)$, $M/M/1/K$, $M/M/c/K$

(پ) مدل M ماشین و c تعمیرکار , $\lambda' = \lambda\,(M-L)$

(۲-۴۰) با استفاده از معادله (۲-۶۸) رابطه برگشتی بین p_{n+1} و p_n برای مدل اصلی تعمیر ماشین را به دست آورید.

(۲-۴۱) در مورد مدل اصلی تعمیر ماشین (بدون امکانات یدکی) نشان دهید که $q_n(M)$، احتمالات نقطه (ورود) خرابی برای جمعیتی به اندازه M برابر $p_n(M-1)$، یعنی، احتمالات زمان کلی برای جمعیتی به اندازه $M-1$ است. گاهی اوقات به q_n عنوان "احتمالات مشاهده کننده درونی" اشاره می‌شود، در حالیکه به p_n به عنوان "احتمالات مشاهده کننده برونی" اشاره می‌شود.

(۲-۴۲) $q_n(M)$ را که توسط معادله (۲-۷۹) برای موقعیت تعمیر ماشین با امکانات یدکی داده شده است به دست آورید و نشان دهید که $p_n(M-1)$ با برابر نیست، بلکه مساوی $p_n(Y-1)$ است. محاسبات جبری بسیار پیچیده است و لذا تنها برای یک مثال عددی [$M=2$، $Y=1$، $c=1$، $\lambda/\mu=1$] نشان دهید. در حالی که این موضوع اثبات نشده است، اما می‌توان نشان داد که به طور کلی برقرار است*.

(۲-۴۳) یک خشکشوئی که با سکه کار می‌کند ۵ ماشین دارد. ویژگیهای عملیاتی ماشینها به

*- به نوشته سویک و میتران (Sevick and Mitran-1979) یا لاونبرگ و ریزر (Lavenberg and Reiser-1979) مراجعه کنید.

گونه‌ای است که هر ماشین مطابق فرایند پواسان با میانگین نرخ خرابی یکی در روز از کار می‌افتد. یک تعمیرکار می‌تواند یک ماشین را مطابق توزیع نمایی با متوسط زمان تعمیر نصف یک روز رفع عیب کند. در حال حاضر سه تعمیرکار مشغول به کارند. مدیر، آقای لوسندرت[1]، مایل است که به جای این سه تعمیرکار از یک تعمیرکاری بسیار ماهر استفاده کند که دستمزدش با کل دستمزد سه تعمیرکار فعلی برابر است، لیکن وی قادر است یک ماشین را در یک سوم زمان رفع عیب کند، یعنی، در یک ششم روز. آیا این فرد به کار گرفته شود؟

(۲-۴۴) فرض کنید که هر یک از ۵ ماشین در یک کارگاه معین مطابق قانون پواسان با نرخ متوسط یکی در هر ۱۰ ساعت از کار بیفتند، و ماشینهای از کار افتاده یکی در هر زمان به وسیله دو تعمیرکار که به صورت دو کانال کار می‌کنند تعمیر شوند، به طوریکه هر ماشین به طور متوسط نیازمند ۵ ساعت برای سرویس است که به طور نمایی توزیع شده است.

(الف) احتمال اینکه دقیقاً یک ماشین در هر زمان "سالم" باشد، چقدر است؟

(ب) اگر کارایی کارگر به وسیله نسبت متوسط زمان انتظار به متوسط زمان سرویس اندازه گیری شود، این معیار برای موقعیت فعلی چقدر است؟

(پ) اگر یک ماشین یدکی مشابه درنظر گرفته شود، پاسخ بند (الف) چه خواهد بود؟

(۲-۴۵) احتمالات حالت پایدار برای مسأله تعمیر ماشین با M ماشین، Y یدکی، و c تعمیرکار $(c\leq Y)$ را اما با نظم زیر پیدا کنید: اگر هیچ وسیله یدکی در دست نباشد و ماشینی خراب شود $(n=Y+1)$، $M-1$ ماشین باقیمانده در حال کار متوقف می‌شوند تا زمانی که یک ماشین تعمیر شود؛ یعنی، اگر ماشینها باید کار کنند، لازم است که M ماشین به طور همزمان کار کنند.

(۲-۴۶) در مدلبندی دنیای واقعی، اکثراً، حتی وقتی که جمعیت تقاضاکننده محدود است، به طور تقریبی از یک مدل منبع نامحدود استفاده می‌شود. برای مقایسه دو مدل، L را برای مثال (۲-۵) با این فرض که جمعیت تقاضاکننده (تعداد ماشینها) نامحدود است،

1- Lew Cendirt.

محاسبه کنید. همچنین L را برای یک مدل دقیق، زمانی که تعداد ماشینها به ترتیب ۱۰ و ۵، و در هر دو حالت $M\lambda = \frac{۱}{۳}$ باشد، محاسبه و آن را با محاسبات یک مدل منبع نامحدود تقریبی مقایسه کنید. فکر می‌کنید که ρ چگونه بر تقریب مؤثر باشد؟ (راهنمایی: موقعی که از یک مدل منبع نامحدود به عنوان تقریبی برای مدل منبع محدود استفاده می‌شود، λ باید برابر $M\lambda$ تعریف شود.)

(۲-۴۷) متوسط هزینه‌های عملیاتی در ساعت را برای مثال (۲-۶) پیدا کنید، وقتی که:

الف) $C_1 =$ هزینه سرعت پائین $=$ ۵ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$؛ $C_2 =$ هزینه ساعت بالا $=$ ۱۰ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$

ب) $C_1 =$ ۵ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$؛ $C_2 =$ ۱۲ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$

(پ) بند (ب) را در ازای $k=$ ۴ ارزیابی کنید. اکنون بهترین سیاست کدام است؟

(۲-۴۸) فرض کنید یک مدل سرویس دو حالته "وابسته به حالت" مانند آنچه که در قسمت (۲-۸) مطرح شد، با $\rho_1 = \frac{۴}{۳}$ و $\rho_2 = \frac{۲}{۳}$ داشته باشیم. فرض کنید که مشتریان، ماشینهای چمن زنی شرکت خدماتی گرین تام لان[1] باشد و لازم است که این ماشینها در زمانهای تصادفی، به وسیله ماشینهای گریس کاری دو سرعتی شرکت، گریسکاری شوند. به علاوه تصور کنید که هزینه هر ساعت عملیات گریسکار در سرعت پایین، C_1، برابر ۵ دلار و در سرعت بالا، C_2، ۲۲ دلار است. همچنین شرکت برآورد کرده است که هزینه از کار افتادن یک چمن زن یک دلار در ساعت خواهد بود. نقطه انتقال سرعت بهینه، k، چیست؟ (راهنمایی: چندین مقدار k را با شروع از $k=1$ امتحان و هزینه مورد انتظار کل را محاسبه کنید).

(۲-۴۹) احتمالات اندازه سیستم در حالت پایدار را برای یک مدل سرویس وابسته به حالت نمایی، ورودی پواسان، و c سرویس کننده که در آن میانگین نرخ سرویس، وقتی که $k>c$ نفر در سیستم باشند، از μ_1 به μ منتقل می‌شود به دست آورید.

(۲-۵۰) احتمالات اندازه سیستم در حالت پایدار را برای یک مدل سرویس وابسته به حالت

1- *Green Thumb Lawn Service Co.*

نمایی، ورودی پواسان، و تنها یک سرویس کننده با میانگین نرخ‌های $\mu_1(1 \le n < k_1)$، $\mu_2(k_1 \le n < k_2)$، و $\mu(n \ge k_2)$ به دست آورید.

(۲-۵۱) در مورد یک موقعیت امتناع $M/M/1$ می‌دانیم که توزیع ایستا به وسیله دو جمله‌ای منفی داده شده است:

$$p_n = \binom{N+n-1}{N-1} x^n (1+x)^{-N-n} \qquad (n \geqslant 0, x > 0, N > 1).$$

مطلوبست تعیین L، L_q، W، W_q، و b_n

(۲-۵۲) در مورد یک مدل امتناع $M/M/1$، می‌دانیم که $b_n = e^{-\alpha n/\mu}$ است. p_n را در ازای جمیع مقادیر n تعیین کنید.

(۲-۵۳) تصور کنید که مدل عدم تمایل $M/M/1$ که در قسمت ۲-۹-۲ عنوان شد، دارای تابع امتناع $b_n = \frac{1}{n}$, $0 \le n \le k$ و 0 در ازای $n>k$، و تابع عدم تمایل $r(n) = \frac{n}{\mu}$ باشد. توزیع اندازه سیستم ایستا را پیدا کنید.

(۲-۵۴) نام یک شرکت زیرک را جعل (ابداع) کنید و برای مؤلفان بفرستید، اما موردی نباشد که منحصراً آنان را به ستوه آورد و در بیان صادق باشید.

(۲-۵۵) تبدیل‌های لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

الف) e^{kt}

ب) $t^{k-1}\,\Gamma(k)$

پ) $\sin kt$

ت) $\int_0^a [1 - \cos tx)x^2]dx$

(۲-۵۶) با استفاده از خواص تبدیل‌های لاپلاس و جداول ضمیمه ۴، توابعی را پیدا کنید که "تبدیل لاپلاس" آنها به صورت زیر داده شده است.

الف) $(s+1) / (s^2 + 2s + 2)$

ب) $1 / (s^2 - 3s + 2)$

پ) $1 / [s^2 (s^2 + 1)]$

ت) $e^{-s} / (s+1)$

(۲-۵۷) خاصیت ۵ جدول $A4.2$ را اثبات کنید. یعنی، اگر $\bar{f}(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه $\bar{f}(s+a)$ تبدیل لاپلاس $e^{-at}f(t)$ خواهد بود.

(۲-۵۸) خاصیت ۱ جدول $A4.2$ را نشان دهید، یعنی، $\mathcal{L}\{\sum_i a_i f_i(t) = \sum_i a_i \bar{f}_i(s)$

(۲-۵۹) تابع فراوانی پواسان را از معادله (۱-۱۵) با استفاده از تابع مولد $P(z,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n$ به دست آورید.

(۲-۶۰) نتیجه‌گیری رفتار موقت $M/M/1/\infty$ را برای $n<i$ به پایان برسانید.

(۲-۶۱) نشان دهید که احتمال اینکه تعداد افراد در یک سیستم $M/M/1/\infty$ در یک نقطه دلخواه از زمان بزرگتر یا مساوی j باشد به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sum_{n=j}^{\infty} p_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\sum_{n=j-i}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\,t) + \sum_{n=j+i+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-n/2} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\right].$$

(۲-۶۲) حل حالت پایدار $M/M/\infty$ را مستقیماً از رفتار موقت نتیجه بگیرید.

(۲-۶۳) تعداد متوسط در یک سیستم $M/M/\infty$ را در هر نقطه از زمان، از معادله (۲-۱۱۵) پیدا کنید.

(۲-۶۴) معادله دیفرانسیل جزئی مربوط به رابطه (۲-۱۱۲) را برای فرآیند تولد ـ مرگ وابسته به زمان، جایی که λ_n به وسیله $\lambda(t)$ جایگزین شده است و $\mu_n=n\mu$ باشد، پیدا کنید. آنگاه برای تابع مولد حل کنید. فرض کنید حالت اولیه مطابق توزیع پواسان انتخاب شده است.

(۲-۶۵) برای مدل $M/M/\infty$، حل موقت، $p_n(t)$، را موقعی که حالت اولیه یک باشد، یعنی $p_1(0)=1$ و $p_n(0)=0\ ,\ n\neq 1$ پیدا کنید.

(۲-۶۶) در مورد مسئله (۲-۶۵)، $p_0(t)$ و $p_3(t)$ را به‌صورت توابعی از زمان رسم کنید (فرض کنید حالت اولیه صفر باشد). مقادیر حالت پایدار p_0 و p_3 را روی گراف نشان دهید.

(۲-۶۷) معادله (۲-۱۱۷) را به دست آورید.

(۲-۶۸) با کاربرد مستقیم مباحث ارزش انتظاری، نشان دهید که در یک صف $M/M/1$،

طولهای مورد انتظار پریودهای بیکاری و مشغول به ترتیب $1/\lambda$ و $1/\mu-\lambda$ هستند.

پروژه‌های کامپیوتری

مسائل زیر پروژه‌های کامپیوتری هستند. از یک کامپیوتر (ریز پردازنده‌ها کاملاً مناسب هستند) و یک زبان به انتخاب خودتان (فرترن، پاسکال، بیسیک، و غیره) استفاده کنید. در برنامه‌های خود، آزادانه از دستورالعملهای "تشریحی"[۱] استفاده کنید، به نحوی که خواندن برنامه تا حدّ امکان ساده شود. همچنین به فرمت‌های مناسب برای ورودی و خروجی توجه کنید. در فهرست برنامه، یک دستورالعمل تشریحی قرار دهید و زبان و ماشین مورد استفاده را مشخص کنید.

(۲-۶۹) $M/M/c$: در ازاء هر λ، μ و c، و k، t: مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، $Pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئله (۲-۲۲) برانید و از $c=$۱,۲,۳,۴؛ $k=$۲,۴؛ و $t=$۶۰,۱۸۰ دقیقه (به ترتیب ۱ ساعت و ۳ ساعت) استفاده کنید.

(۲-۷۰) $M/M/c/K$: در ازای هر λ، μ، c، K، k، و t: مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، p_k، $Pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئلهٔ (۲-۳۴) در ازای $K=$۶,۷ برانید. به ترتیب از $k=$۲,۴ و $t=$۲,۳ ساعت استفاده کنید.

(۲-۷۱) **مدل تعمیر ماشین با امکانات یدکی**: در ازای هر λ، μ، c، M، Y (شامل $Y=0$)، k، و t مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، $pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئله (۲-۴۳) برای حالات $Y=0$ و به ترتیب استفاده از $k=$۱,۲ و $t=$۰/۱,۰/۲ روز برانید. همچنین حالت زیر را برانید: $M=$۱۰، $Y=$۲، $\lambda=$۱، $\mu=$۳/۵، $c=$۳. در اینجا، به ترتیب برای $k=$۲,۴ و $t=$۰/۱,۰/۲ برانید.

(۲-۷۲) **مدل تولد ـ مرگ کلّی**: بگذارید فضای حالت محدود N (مثلاً حداکثر ۱۰۰) باشد و ورودی $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})$ و $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N)$ باشند. در ازای بردارهای λ و μ ورودی، p_0، p_n، و L را محاسبه کنید. اگر چنانچه توانایی گرافیکی نیز دارید، هیستوگرام p_n را رسم کنید. برنامهٔ خود را با رانش‌های موارد زیر کنترل کنید: (الف) مسئلهٔ ۲-۷۰ (۲-۳۴) و (ب) $\lambda=$(۱,۱,۲,۲,۳,۱) $\mu=$(۱,۱,۱,۲,۲,۲).

1- Comment.

مسائل فصل چهارم

(۴-۱) مطلوب است تعیین حل [معادله (۴-۵)] معادلات (۴-۴) با استفاده از معادله(۱-۱۷)، معادله (۲-۴۱)، و شرط مرزی $F_n(0)=p_n$، مطابق روش بخش (۱-۸).

(۴-۲) نشان دهید که تعداد در سیستم در زمان t پس از آخرین خروجی، $N(t)$، و زمان بین خروجیهای متوالی، T، متغیرهای تصادفی مستقلند [راهنمایی: توزیع احتمال حاشیه‌ای $N(t)$ را از رابطه (۴-۵۲) پیدا کنید و نشان دهید که حاصل ضرب آن و $c(t)$ توزیع احتمال توأم را ارائه می‌کند.] همچنین نشان دهید که زمان‌های بین دو خروجی متوالی مستقلند.

(۴-۳) در مورد مثال (۴-۱) همان مقیاسهای کارایی را با استفاده از اینکه سه پیشخوان پرداخت در حال کار هستند، محاسبه کنید. اگر شما مشاور می‌بودید، در مورد تعداد پیشخوانهای در حال کار چه پیشنهادی ارائه می‌دادید؟

(۴-۴) در مورد یک صف سری با دو ایستگاه (یک سرویس کننده در هر ایستگاه) با ورودی پواسان به اولی با پارامتر λ، سرویس‌نمایی در هر ایستگاه با پارامترهای به ترتیب μ_1 و μ_2 فقدان حد بر تعداد در سیستم در هر ایستگاه، نشان دهید که احتمال حالت پایدار که n_1 در سیستم ایستگاه اول (صف و سرویس) و n_2 در سیستم ایستگاه دوم باشند، به صورت زیر خواهد بود:

$$p_{n_1,n_2}=p_{n_1}p_{n_2}=\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

[راهنمایی: معادلات دیفرانسیل برای $p_{n_1,n_2}(t)$ را پیدا کنید و سپس از آنها معادلات دیفرانس حالت پایدار را پیدا کنید. با جایگزینی نشان دهید که $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}p_{0,0}$ جوابی برای این معادلات است و آنگاه $p_{0,0}$ را با شرط مرزی $\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}p_{n_1,n_2}=1$ پیدا کنید.]

(۴-۵) یک سیستم صف سری با سه ایستگاه (یک سرویس کننده در هر ایستگاه) با ورودی پواسان، پارامتر λ، و سرویس نمایی، پارامترهای به ترتیب μ_1، μ_2، μ_3 را در نظر بگیرید. هیچ حد ظرفیتی بر صف در جلوی دو ایستگاه اول وجود ندارد، لیکن در

ایستگاه سوم حد k (شامل سرویس) وجود دارد. اگر k در ایستگاه سوم باشند، آنگاه هر ورودی بعدی، اجازه ورود به سیستم را پیدا نمی‌کند. تعداد مورد انتظار در سیستم (هر سه ایستگاه) و زمان مورد انتظار صرف شده در سیستم به وسیله یک مشتری که هر سه مرحله سرویس را تکمیل می‌کند را تعیین کنید.

(۴-۶) نتایج (۴-۸) را از (۴-۷) و شرط مرزی به دست آورید.

(۴-۷) معادلات دیفرانس حالت پایدار برای یک سیستم با یک سرویس کننده و دو ایستگاه متوالی با ورودی پواسان پارامتر λ و سرویس نمایی با پارامترهای به ترتیب μ_1 و μ_2 را به دست آورید، که در آن تشکیل صف در جلوی ایستگاه یک مجاز نبوده و حداکثر یک مشتری مجاز است بین ایستگاهها منتظر بماند. وقفه موقعی رخ می‌دهد که یک مشتری در ایستگاه دو منتظر بوده و یک مشتری در ایستگاه یک تکمیل شده است. برای حالتی که $\mu_1=\mu_2$ بوده، احتمالات حالت پایدار را پیدا کنید.

(۴-۸) در مورد صف سری سه ایستگاهه با وقفه که در جلوی ایستگاه ۱ صف نامحدود مجاز است امّا هیچ صفی در جلوی ایستگاه‌های ۲ یا ۳ مجاز نیست، هشت توصیفگر حالت سیستم چیست؟

(۴-۹) در مورد یک شبکه جکسون باز، (الف) مجموعه معادلات (۴-۹) تعادل حالت پایدار را تعمیم دهید تا c_i سرویس کننده در هر گره مجاز باشد و (ب) نشان دهید که جواب داده شده به وسیله (۴-۱۲)، رابطه (۴-۹) را ارضا می‌کند. [راهنمایی: در اصلاح رابطه (۴-۹) از فاکتور $a_i(n_i)$ استفاده کنید.]

(۴-۱۰) رستوران چینی ون هانگ ری[1] دو نوع خوراک سرو می‌کند، چومین[2] و اسپیرریبز[3] دو پنجره جداگانه وجود دارد، یکی برای چومین و یکی برای اسپیرریبز. مشتریان مطابق فرایند پواسان با نرخ میانگین ۲۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. ۶۰ درصد به سراغ چومین می‌روند و ۴۰ درصد به طرف پنجره ریب. ۲۰ درصد آنهایی که از پنجره چومین خرید کرده‌اند، سپس به پنجره ریب می‌روند؛ ۸۰

1- Won Hung Rhee.
2- Chow-mein.
3- Spare-ribs.

درصد دیگر رستوران را ترک می‌گویند. ۱۰ درصد آنهایی که ریب خریده‌اند، سپس به پنجره چومین می‌روند، در حالی که ۹۰ درصد دیگر ترک می‌کنند. به طور متوسط تکمیل یک سفارش چومین، ۴ دقیقه و تکمیل یک سفارش اسپیرریب، ۵ دقیقه به طول می‌انجامد. زمانهای سرویس نمایی هستند. به طور متوسط، چند نفر در رستوران هستند؟ متوسط انتظار در هر پنجره چقدر است؟ اگر شخصی هم چومین و هم ریب بخواهد، به طور متوسط، چه مدتی را در رستوران صرف می‌کند؟

(۴-۱۱) برای یک شبکه جکسون بسته، (الف) مجموعه معادله (۴-۱۴) تعادل حالت پایدار را تعمیم دهید تا c_i سرویس‌کننده در هر گره مجاز باشد و (ب) نشان دهید که جواب داده شده توسط رابطه (۴-۲۱)، رابطه (۴-۱۴) را ارضا می‌کند. [راهنمایی: راهنمایی مسئله (۴-۹) را ببینید.]

(۴-۱۲) مسئله‌ای مانند مثال (۴-۲) را در نظر بگیرید، اما فرض کنید مدیریت تصمیم گرفته است که سرویس‌کننده دیگری را مشابه فردی که هم‌اکنون وجود دارد به گره دو اضافه کند. قابلیت‌های دسترسی حالت پایدار را پیدا کنید که (الف) هر دو ماشین در حال کار باشند، و (ب) حداقل یکی در حال کار باشد.

(۴-۱۳) نشان دهید که برای یک ماشین، یک تعمیرکار، حل به دست آمده از معادله (۲-۶۸) در بخش (۲-۷) همانند حل به دست آمده از معادله (۴-۳۰) است.

(۴-۱۴) معادله (۴-۳۰) را برای چند سرویس کننده تعمیم دهید.

(۴-۱۵) مسئله (۲-۴۴) را با استفاده از نتیجه صف حلقه‌ای به دست آمده از مسئله (۴-۱۴)، حل کنید.

فصل پنجم

مدلهایی که الگوهای ورودی کلّی یا الگوهای سرویس کلّی دارند

برای مدلهایی که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، تجزیه و تحلیل چپمن کلموگرو مانند فصلهای قبل ممکن نیست، زیرا ما دیگر بعلت برداشتن فرض نمایی از روی زمانهای بین ورودی متوالی و / یا زمانهای سرویس، دیگر یک فرایند مارکوف نخواهیم داشت. به هر حال، برای بسیاری از مدلهایی که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد، در حالی که دیگر یک فرایند مارکوف نداریم، با این وجود در درون این فرایند احتمالی غیرمارکوفی یک زنجیرهٔ مارکوف جا داده شده است (که به عنوان یک زنجیرهٔ مارکوف جا داده شده مورد اشاره قرار می‌گیرد، بخش ۱۰-۱ را ببینید). برای این نوع مدلها، ما می‌توانیم برخی از تئوری زنجیره‌های مارکوف (بخش ۱۰-۱) را برای تجزیه و تحلیل خود به کار گیریم. ابتدا ما مورد ورودی پواسان و سرویس کلّی با یک سرویس‌کننده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۵-۱) صفهای تک‌سرویس‌کننده با ورودی پواسان و سرویس کلّی $(M/G/1)$

سیستم را در لحظه‌ای که سرویس یک مشتری تکمیل شده و سرویس مشتری بعدی که در صف بوده در شرف شروع شدن است، در نظر بگیرید. زمانهای سرویس متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان با توزیع احتمالی اختیاری خواهند بود. ما توزیع احتمالی جمعی (CDF) را با $B(t)$ و تابع چگالی را در صورتی که وجود داشته باشد، با $b(t)$ مشخص می‌کنیم. فرایند ورودی، مانند سابق، پواسان با پارامتر λ است. فرایند احتمالی جا داده شده $X(t_i)$، جایی که X دلالت بر تعداد افراد در سیستم می‌کند و t_1، t_2، t_3،... زمانهای متوالی تکمیل سرویس هستند، به طریق زیر می‌توان نشان داد که مارکوفی است. نظر به اینکه t_i زمان تکمیل مشتری i ام می‌باشد، سپس $X(t_i)$ تعداد مشتریانی است که مشتری i ام در موقع خروجی (هنگام ترک سیستم) پشت سر خود باقی می‌گذارد. به علّت اینکه فضای حالت