با ارزیابی این مشتق در نقطه صفر خواهیم داشت:

$$E\left[T_{\text{مشغول}}\right] = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

زیاد مشکل نخواهد بود که اصطلاح دوره مشغول را از لحاظ مفهومی برای مورد چند کاناله گسترش داد. به خاطر آورید که برای یک کانال، دوره مشغول چنین تعریف می‌شود که با ورود یک مشتری به یک کانال بیکار شروع شده و با بیکار شدن مجدد کانال ختم می‌شود. با شیوه مشابهی، بگذارید دوره مشغول i کانال را برای $(0 \le i \le c)$ $M/M/c$، چنین تعریف کنیم که با ورود یک مشتری به سیستم در لحظه‌ای که $i-1$ نفر در سیستم وجود دارد شروع شود، و در لحظه‌ای که مجدداً اندازه سیستم به $i-1$ نفر می‌رسد ختم شود. بگذارید اظهار کنیم موردی که $i=1$ است (ورود به یک سیستم خالی) دوره مشغول سیستم را تعریف کند. با شیوه‌ای مشابه مورد $M/M/1$، $T_{b,i}$ را به کار می‌بریم تا دلالت بر متغیر تصادفی "طول پریود مشغول i کانال" کند. سپس CDF مربوط به $T_{b,i}$ با بررسی معادلات دیفرانسیل ـ دیفرانس $M/M/c$ اصلی (۲-۲) و نهادن حائل جذب کننده بر روی اندازه سیستم $i-1$ و اندازه اولیه i، تعیین می‌شود. از این رو باید واضح باشد که در حقیقت CDF مورد نیاز $p_{i-1}(t)$ است و $p'_{i-1}(t) = \frac{dp_{i-1}(t)}{dt}$ چگالی آن خواهد بود. معادلات لازم خواهند بود:

$$\begin{cases} p'_{i-1}(t) = i\mu p_i(t) & \text{[به علت حائل جذب‌کننده]} \\ p'_i(t) = -(\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t) & \text{[به علت حائل جذب‌کننده]} \\ p'_n(t) = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) & (i < n < c) \\ p'_n(t) = -(\lambda + c\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + c\mu p_{n+1}(t) & (n \ge c) \end{cases}$$

ادامه شیوه مربوط به $M/M/1$ در این مرحله ما را با جزئیات جبری زیادی مواجه خواهد ساخت. کافی است بیان کنیم که تمامی CDFهای حاصله بر حسب توابع بسل اصلاح شده خواهند بود، لیکن با صرف وقت کافی و داشتن حوصله، $p'_{i-1}(t)$، $\bar{p}_{i-1}(s)$ ، و $E[T_{b,i}]$ را می‌توان به دست آورد.

مسائل فصل دوم

(۲-۱) سطر دوم معادله (۲-۴a) را با استفاده از تعادل احتمالی به دست آورید:

(۲-۲) قدمهای منجر به معادلات (۲-۵) را (الف) با استفاده از رابطه (۲-۴) و (ب) با استفاده از نتیجه تعادل مشروح $\lambda p_n = \mu p_{n+1}$ را تهیه و ارائه کنید.

(۲-۳) برای توابع مولد زیر (لزوماً توابع مولد احتمالی نیستند) ترتیب تولید آنها را بنویسید:

(الف) $G(z) = 1/(1-z)$

(ب) $G(z) = z/(1-z)$

(پ) $G(z) = e^z$

(۲-۴) نشان دهید که تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، مساوی با حاصلضرب توابع مولد گشتاور مربوط به تک تک متغیرهای تصادفی است.

(۲-۵) با استفاده از نتیجه مسئله (۲-۴) نشان دهید که:

(الف) مجموع دو متغیر تصادفی پواسان مستقل، یک متغیر تصادفی پواسان است.

(ب) مجموع دو متغیر تصادفی نمایی مستقل و یکسان، دارای توزیع گاما است.

(پ) مجموع دو متغیر تصادفی نرمال مستقل، یک متغیر تصادفی نرمال است.

(۲-۶) با استفاده از روش اپراتورها، معادله دیفرانس

$$p_{n+4} - 10p_{n+3} + 35p_{n+2} - 50p_{n+1} + 24p_n = 0,$$

را با توجه به $p_0=0$، $p_1=1$، $p_2=0$، و $p_3=1$ حل کنید.

(۲-۷) سؤالات زیر را درباره توزیع ترکیبی زمان انتظار در صف $w_q(t)$ برای یک مدل $M/M/1$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $w_q(t)$ از معیار قابلیت جمع به واحد[1] یک توزیع احتمالی معتبر پیروی می‌کند.

(ب) مطلوب است تعیین $E[T_q | T_q > 0]$، یعنی، ارزش انتظاری زمانی که یک فرد باید در صف منتظر بماند، به شرط اینکه کلاً ناچار است منتظر بماند.

1- Summability-to-one.

(۲-۸) $w(t)$ و W (چگالی زمان انتظار کل و ارزش انتظاری آن) را که به وسیله معادلات (۲-۳۱) و (۲-۳۲) داده شده‌اند به دست آورید.

(۲-۹) معادله (۱-۱) برای هر سیستم صف معتبر است و به وسیله راس (Ross-1970) برای اثبات فرمول لیتل برای صف $G/G/1$ به طریقی متفاوت از آنچه که در قسمت (۲-۲-۵) دیدیم، به کار رفته است. رویه وی عبارت است از ترسیم شمارش جمعی ورودی‌ها روی یک گراف در مقابل شمارش جمعی خروجی‌ها. آنگاه می‌توان ملاحظه کرد که سطح بین این دو تابع پله‌ای از آغاز یک دوره مشغول تا آغاز دوره مشغول بعدی (یک سیکل مشغول) مجموع زمانهای انتظار کل تمامی مشتریانی است که در طول این سیکل مشغول وارد سیستم شده‌اند. با استفاده از این بحث، یک بیان تجربی از فرمول لیتل در طول یک سیکل مشغول به دست آورید.

(۲-۱۰) تأثیر دو برابر کردن λ و μ بر L، L_q، و W در یک مدل $M/M/1$ چیست؟

(۲-۱۱) یک معاون پژوهشی فارغ التحصیلان در پیشخوان سفارشات کوتاه در طول ساعات کارش، تنها مسئول پیشخوان است. به نظر می‌رسد که ورودی‌هایی که به پیشخوان می‌آیند از توزیع پواسان با میانگین ۱۰ نفر در ساعت پیروی می‌کنند. در هر زمان یک مشتری سرویس می‌شود و زمان سرویس از توابع نمایی با میانگین ۴ دقیقه پیروی می‌کند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) احتمال داشتن صف چقدر است؟

(ب) طول متوسط صف چقدر است؟

(پ) متوسط زمانی که یک مشتری در سیستم صرف می‌کند، چقدر است؟

(ت) احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه در صف صرف کند، قبل از اینکه پیشخدمت به او برسد، چقدر است؟

(ث) معاون مذکور می‌خواهد اوقات بیکاری خود را صرف درجه‌بندی مقالات کند. اگر او بتواند به طور متوسط ۲۲ مقاله را در یک ساعت درجه‌بندی نماید، به طور متوسط در حین انجام شیفت کاری خود، چند مقاله را در یک ساعت می‌تواند معدل بگیرد؟

(۲-۱۲) امکانات تعمیرات و نگهداری کرایه اتومبیل دارای توانایی‌های تعمیرات و نگهداری معمولی (تعویض روغن، روغنکاری، تنظیم موتور، شست و شو، و غیره) برای تنها یک اتومبیل در یک زمان است. اتومبیلها برای این تعمیرات و نگهداری معمولی مطابق فرآیند پواسان با نرخ میانگین سه اتومبیل در روز وارد می‌شوند و زمان سرویس برای انجام این تعمیرات، دارای توزیع‌نمایی با میانگین $\frac{7}{24}$ روز است. هزینه ثابت کارکرد تجهیزات شرکت ۷۵ دلار در روز است. شرکت برآورد کرده است که برای هر اتومبیل که هر روز در کارگاه بماند، ۵ دلار در روز سود از دست می‌دهد. شرکت با تغییر روشهای خاص و استخدام مکانیک‌های چابک‌تر، می‌تواند متوسط زمان سرویس را به $\frac{1}{4}$ روز تقلیل دهد، البته در این صورت هزینه‌های کارکرد افزایش خواهند یافت. هزینه‌های کارکرد تا چه مقداری می‌توانند افزایش یابند، پیش از آنکه، دیگر از لحاظ اقتصادی، انجام تغییر قابل قبول نباشد.

(۲-۱۳) قبل از آنکه قطعات مونتاژ شده به صورت یک محصول کامل درآید، باید رنگ‌آمیزی شوند. مرکز رنگ از یک دستگاه رنگ اتوماتیک تشکیل شده و قطعات به صورت تصادفی و فرآیند پواسان با میانگین نرخ λ در هر ساعت وارد این مرکز می‌شوند. مشاهده شده است که میانگین زمان سرویس فرایند رنگ‌کاری $1/\mu$ ساعت با توزیع‌نمایی است. تخمین زده می‌شود که شرکت برای هر واحد محصول به ازای هر ساعتی که محصول در مرکز رنگ معطل بماند، حدوداً C_1 دلار پرداخت خواهد کرد. هزینه عملیاتی دستگاه رنگ قطعاً تابعی از سرعت عملیات دستگاه است، و به خصوص، موقعی که دستگاه با میانگین نرخ μ کار می‌کند، دارای نرخ هزینه μC_2 دلار در هر ساعت خواهد بود، خواه دستگاه همواره در حال کار باشد یا نباشد. μ چه اندازه باید بزرگ باشد تا به شرکت اجازه دهد که هزینه عملیات رنگ‌کاری را حداقل کند؟

(۲-۱۴) در یک سیستم $M/M/c/\infty$ احتمال اینکه به ازای $k \geq c$ تعداد k یا بیشتر در سیستم باشند، را تعیین کنید.

(۲-۱۵) برای مدل $M/M/c/\infty$، عبارتی برای p_n بر حسب p_c (به جای p_0) ارائه کنید و سپس L_q و $W_q(t)$ را بر حسب ρ و p_c به دست آورید.

(۲-۱٦) (الف) برای مدل $M/M/c/\infty$ با استفاده از بحث ارزش انتظاری، نشان دهید

که $L=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$ است.

(راهنمایی: بگذارید N بیانگر متغیر تصادفی "تعداد در سیستم" و N_q متغیر تصادفی "تعداد در صف" باشد. سپس داریم $N_q=N-N$ وقتی که $N<c$ است و $N_q=N-c$ وقتی که N بزرگتر یا مساوی c است. حالا با استفاده از معادلات (۲-۴۱) و (۲-۴۳) نتیجه مطلوب را اثبات کنید).

(ب) نشان دهید که ارزش انتظاری تعداد سرویس کنندگان مشغول برای هر صف $G/G/c$ برابر $\frac{\lambda}{\mu}$ است (راهنمایی: از فرمول لیتل استفاده کنید).

(۲-۱۷) نشان دهید که محاسبه W_q با $\int_0^\infty t dW_q(t)$ برای مدل $M/M/c/\infty$ همان نتیجه‌ای را فراهم می‌سازد که به وسیله معادله (۲-۴۵) بیان شده است.

(۲-۱۸) برای مدل $M/M/c/\infty$، تابع چگالی شرطی $w_q(t|t>0)$، یعنی، چگالی زمان انتظار در صف را برای کسانی که[۱] مجبورند منتظر بمانند به دست آورید. همچنین ارزش انتظاری انتظار در صف را برای کسانی که منتظر مانده‌اند، پیدا کنید.

(۲-۱۹) برای مدل $M/M/c/\infty$، $w(t)$ تابع چگالی زمان کل صرف شده در سیستم را به دست آورید و با استفاده از آن W را محاسبه و نتیجه خود را با معادله (۲-۴۶) کنترل کنید. (راهنمایی: اگر از رویه به دست آوردن $CDF\ W(t)$ استفاده شود، باید دو حالت در نظر گرفته شود، یکی موقعی که کمتر از c در سیستم است و یک ورودی بلافاصله می‌تواند وارد سرویس شود و دیگری موقعی که c یا بیشتر در سیستم باشند. برای مورد اخیر، کان ولوشن‌ای از یک ارلنگ و یک نمایی مورد نیاز است، که کاملاً مشکل است. در اینجا راحت‌تر است که $w(t)$ را مستقیماً به‌وسیله $w(t)dt \doteq Pr\{t\leq T\leq t+dt\}$ و تشخیص اینکه احتمال یک سرویس در dt برابر μdt است، به دست آوریم).

(۲-۲۰) نشان دهید که برای یک مدل $M/M/c$ احتمال اینکه سرویس کننده‌ای مشغول باشد، برابر $\lambda/c\mu$ است.

(۲-۲۱) معاونت بازرسی در امور ایمنی و بازرسی، برنامه رسیدگی و گزارش حوادث نیروی هوایی را اداره می‌کند. ۲۵ تیم رسیدگی برای تجزیه و تحلیل و ارزیابی هر حادثه تشکیل شده است تا اطمینان حاصل شود که به گونه مناسبی به هیئتهای رسیدگی به

حوادث، گزارش شده است. هر یک از این تیمها به محض اینکه احتیاجات پشتیبانی فراهم شود به محل حادثه اعزام می‌شوند. پشتیبانی تنها شامل کسانی می‌شود که امکانات و پرسنل واجد شرایط ندارند تا چنین سرویس‌هایی را هدایت کنند. هر حادثه به یک تیم نیاز دارد که به مقدار تصادفی از زمان که ظاهراً نمایی با میانگین ۳ هفته است، اعزام می‌شوند. احتیاجات پشتیبانی از اداره معاونت کل بازرسی به صورت فرایند پواسان با نرخ میانگین ۳۴۷ در سال دریافت می‌شوند. در هر زمان داده شده، دو تیم به علت مرخصی پرسنل، بیماری، و غیره در دسترس نیست. ارزش انتظاری زمانی که در یک حادثه (انتظار برای ارزیابی) صرف می‌شود، تعیین کنید.

(۲-۲۲) سازمانی درگیر تأسیس یک مرکز ارتباط تلفنی است، به طوریکه توانایی صدور پیام آن سریعتر باشد. به طور کلی، مرکز مسئول انتقال پیامهای صادره است و باید پیامهای وارده را نیز دریافت و توزیع کند. در حال حاضر هدف اصلی مدیر مرکز این است که تعداد پرسنل انتقال دهنده مورد نیاز در مرکز جدید را بداند. انتقال دهنده‌های پیامهای صادره مسئول انجام تصمیمات جزئی در پیامها، تخصیص اعداد وقتی که از شکلهای پیام اصلی دورند، تعمیر و نگهداری شاخص کدها، فایل ۳۰ روزه از پیامهای صادره، و انتقال واقعی پیام هستند. از قبل معلوم شده است که این فرایند نمایی بوده و زمان پردازش به طور متوسط ۲۸ دقیقه برای هر پیام است. پرسنل انتقال ۷ ساعت در روز و ۵ روز در هفته در این مرکز کار خواهند کرد. تمامی پیامهای صادره به ترتیب دریافت مورد پردازش قرار می‌گیرند و از فرایند پواسان با نرخ میانگین $\frac{۲۱}{۷\text{ساعت-روز}}$ پیروی می‌کنند. پردازش پیامهای مستلزم انتقال باید به طور متوسط ظرف ۲ ساعت از زمان ورود آنها به مرکز شروع شود. تعداد حداقل پرسنل انتقال دهنده برای انجام این معیار سرویس را تعیین کنید. اگر معیار سرویس به این صورت تعریف شود که احتمال اینکه پیام برای شروع انتقال بیش از ۳ ساعت منتظر بماند کمتر از ۵٪ باشد، چند نفر برای انتقال پیامها مورد نیاز خواهد بود؟

(۲-۲۳) بانک کوچکی دارای دو متصدی یکی برای دریافت وجه و دیگری برای پرداخت وجه است. مشتریان مطابق توزیع پواسان با میانگین ۲۰ نفر در ساعت به هر یک از

متصدیان مراجعه کنند. (نرخ ورودی میانگین کل به بانک ۴۰ نفر در ساعت است). زمان سرویس هر یک از متصدیان نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. مدیر بانک مسئله تغییر روش را بررسی می‌کند، به طوری که هر یک از متصدیان بتوانند هم پرداخت کنند و هم سپرده‌ها را بپذیرند تا از موقعیتهایی که که گهگاه پیش می‌آید که صف در جلوی یکی از باجه‌ها تشکیل می‌شود در حالی که باجه دیگر بیکار است، اجتناب شود. به هر حال، از آنجاکه متصدیان مجبورند هم سپرده‌ها را بپذیرند و هم وجوه را پرداخت کنند، بازدهی آنها کاهش می‌یابد و میانگین زمان سرویس ۲/۴ دقیقه خواهد شد. سیستم فعلی را با سیستم پیشنهادی با توجه به ارزش انتظاری تعداد کل افراد در بانک، زمان مورد انتظار که یک مشتری باید در بانک صرف کند، احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۵ دقیقه منتظر بماند، و زمان بیکاری متوسط متصدیان باجه‌ها مقایسه کنید.

(۲-۲۴) شرکت هات توترات[1] باید بین کارکرد یکی از دو نوع کارگاههای سرویس برای تعمیر و نگهداری کامیونهایش انتخاب کند. برآورده شده است که کامیونها مطابق توزیع پداسان با نرخ میانگین یکی در هر ۴۰ دقیقه وارد امکانات تعمیر و نگهداری خواهند شد و احساس می‌شود که این نرخ مستقل از نوع امکان انتخاب شده می‌باشد. در نوع اول کارگاه، دو امکان به طور موازی کار می‌کنند و هر یک از این امکانات می‌توانند به یک کامیون به طور متوسط در ۳۰ دقیقه سرویس ارائه کنند (زمان سرویس از توزیع نمایی پیروی می‌کند). در نوع دوم، تنها یک امکان وجود دارد، لیکن می‌تواند به طور متوسط در ۱۵ دقیقه یک کامیون را سرویس کند (زمانهای سرویس در این حالت نیز نمایی‌اند). به منظور کمک به مدیریت در تصمیم‌گیری، از تحلیلگر تحقیق در عملیات، آقای سی. ریف تی[2] خواسته شده است که به سؤالات زیر پاسخ دهد:

(الف) به طور متوسط چند کامیون در هر یک از دو نوع امکانات خواهد بود؟

1- Hott Too Trott.
2- C. Raf Tee.

(ب) به طور متوسط، یک کامیون چه مدت در هر یک از دو نوع امکانات صرف خواهد کرد؟

(پ) مدیریت محاسبه کرده است که هر دقیقه که یک کامیون در کارگاه صرف کند، سهم سود را به اندازه دو دلار کم می‌کند. همچنین تجارب قبلی در زمینه کارکرد کارگاههایی با دو امکان نشان داده که هزینه عملیاتی چنین امکانی یک دلار در دقیقه است (شامل کارگر، سربار، و غیره). هزینه عملیاتی در هر دقیقه برای کارکرد نوع دوم (تنها یک امکان) چقدر باشد تا اختلافی بین دو نوع کارگاه موجود نباشد؟

(۲-۲۵) شرکت کامپوتر[1] که تجهیزات پردازش داده الکترونیک (EDP) را اجاره می‌دهد، نیاز به تعمیرات اساسی تجهیزات خود را یک بار در سال در نظر می‌گیرد. طرح ۱ تهیه دو ایستگاه تعمیر و نگهداری جداگانه است که در آن تمام کار با دست انجام می‌شود (یک ماشین در یک زمان) و هزینه سالانه کل آن ۱۵۰۰۰۰ دلار است. زمان تعمیرات و نگهداری برای یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۶ ساعت است. طرح ۲ تهیه یک ایستگاه تعمیر و نگهداری با تجهیزات اکثراً اتوماتیک است و هزینه سالانه آن ۲۰۰۰۰۰ دلار است. در این حالت، زمان تعمیر برای یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت است. در مورد هر دو طرح، ماشینها مطابق توزیع پواسان با نرخ ورود میانگین یکی در هر ۸ ساعت وارد می‌شوند (نظر به اینکه شرکت تعداد زیادی از این ماشینها را اجاره می‌دهد، جمعیت ماشین را نامحدود در نظر می‌گیریم). هزینه زمان بیکاری هر ماشین ۳۰ دلار در ساعت است. شرکت باید کدام طرح را انتخاب کند؟ فرض کنید امکانات تعمیر و نگهداری همواره باز باشد و ۸۷۶۰ = (۳۶۵)(۲۴) ساعت در سال کار می‌کنند.

(۲-۲۶) نشان دهید که (الف) با ρ یکسان، $M/M/1/\infty$ نسبت به L همواره بهتر از $M/M/2/\infty$ خواهد بود و (ب) اینکه یک مدل $M/M/2/\infty$ همواره بهتر از دو صف $M/M/1/\infty$ مستقل با نرخ سرویس یکسان است که هر یک نیمی از ورودیها را داشته باشند.

(۲-۲۷) برای مدل $M/M/c/K$ نشان دهید که گرفتن حد p_n و p_0 وقتی که $K\to\infty$ و محدود

1- Compewter.

کردن $\lambda/c\mu<1$ در معادلات (۲-۵۳) و (۲-۵۴)، نتایج مدل $M/M/c/\infty$ را که با معادلات (۲-۴۱) و (۲-۴۳) بیان شده‌اند، ارائه می‌دهد.

(۲-۲۸) با استفاده از معادلات (۲-۵۴)، (۲-۵٦)، و (۲-۵۷) نشان دهید که معادلات (۲-۵۸) و (۲-۵۹) نتایج یکسانی ارائه می‌کنند، یعنی، $L-L_q=\frac{\lambda'}{\mu}$ است.

(۲-۲۹) نشان دهید که معادلات (۲-۵۳) تا (۲-۵٦) مدل $M/M/c/K$ در ازای $c=1$ به معادلات (۲-٦۰) تا (۲-٦۳) مربوط به $M/M/1/K$ ساده می‌شوند.

(۲-۳۰) نشان دهید که دو عبارت نرخ ورود میانگین مؤثر λ'، در مدل $M/M/1/K$، مساوی‌اند، یعنی، $\lambda(1-p_k)=\mu(L-L_q)$ است.

(۲-۳۱) مطلوب است تعیین احتمال اینکه انتظار یک مشتری در صف $M/M/1/3$ با $\lambda=4$/ساعت و $1/\mu=15$ دقیقه، بیش از ۲۰ دقیقه باشد.

(۲-۳۲) یک کارگاه کوچک شست و شوی اتومبیل که در آن تا وقتی که کار اتومبیل جلویی به طور کامل پایان نپذیرد اتومبیل بعدی نمی‌تواند وارد شود، دارای ظرفیت نگهداری حداکثر ۱۰ اتومبیل در محوطه خود است (شامل یکی که در دستگاه شست و شو است). شرکت دریافته است که ورودیها پواسان با نرخ میانگین ۲۰ اتومبیل در ساعت است و زمانهای سرویس نمایی با میانگین ۱۲ دقیقه است. تعداد متوسط اتومبیلهایی که به خاطر محدودیت ظرفیت در هر روز ۱۰ ساعته نمی‌توانند وارد کارگاه شوند، چقدر است؟

(۲-۳۳) تحت این فرض که اگر جایی برای نشستن نباشد مشتریان منتظر نخواهند ماند، آرایشگر کات می‌تواند در روزهای شنبه اطاق کنفرانس یک شرکت نرم‌افزار کامپیوتر کوچک را که مجاور مغازه وی است به ۴ دلار اجاره کند (هزینه نظافتچی در روز شنبه). مغازه وی شنبه‌ها از ساعت ۸ صبح تا ۲ بعد از ظهر باز است و سود نهایی او ۲/۲۵ دلار از هر اصلاح است. در مغازه وی ۴ نفر دیگر می‌توانند بنشینند. آیا کات این اطاق را اجاره کند؟

(۲-۳۴) شرکت نفتی فولرهیر[1] عملیات تخلیه نفت خام در پالایشگاه اصلی را به عهده دارد.

1- Fowler-Hier.

بندر شش محل تخلیه و چهار تیم تخلیه کننده دارد. وقتی که تمام جایگاهها پر باشند، کشتی‌های وارده به طرف یک وسیله شناور در ۲۰ مایلی رودخانه هدایت می‌شوند. تانکرها مطابق فرایند پواسان با میانگین یکی در هر ۲ ساعت وارد می‌شوند. به طور متوسط ۱۰ ساعت طول می‌کشد تا یک تیم تخلیه تانکری را تخلیه کند، زمان تخلیه از توزیع نمایی پیروی می‌کند. تانکرهایی که منتظر تیم تخلیه کننده‌اند بر مبنای اولین وارده، اولین سرویس شده انتخاب می‌شوند. مدیر شرکت مایل است بداند:

(الف) به طور متوسط چند تانکر در بندر است؟

(ب) به طور متوسط یک تانکر چه زمانی را در بندر صرف می‌کند؟

(پ) نرخ ورود متوسط به وسیله شناور چقدر است؟

(ت) شرکت احداث محل تخلیه دیگری را در بندر اصلی در دست مطالعه دارد. برآورد شده است که هزینه‌های ساختمان و تعمیر و نگهداری X دلار در سال است. شرکت تخمین زده است که هدایت یک تانکر به بندر شناور موقعی که بندر اصلی پر است، دارای هزینه Y دلار است. رابطه بین X و Y چگونه باشد تا احداث محل تخلیه اضافی در بندر اصلی توجیه پذیر باشد؟

(۲-۳۵) شرکت هواپیمایی فلای بای نایت[1] دارای ارتباط تلفنی با سه خط است، که هر یک در طول پریودهای مشغول به یک متصدی مجهّز شده است. در طول اوج ۳ ساعت از پریود ۲۴ ساعتی، تماس گیرندگان بسیاری موفق به برقراری ارتباط نمی‌شوند (اگر همه سرویس کنندگان مشغول باشند، نمی‌توان تماس‌گیرندگان را نگهداشت). شرکت برآورد کرده است که به خاطر رقابت شدید، ٦۰ درصد تماس گیرندگان که موفق به برقراری تماس نمی‌شوند از شرکت هواپیمایی دیگری استفاده می‌کنند. اگر تعداد تماسها در طول این پریودهای اوج تقریباً پواسان با میانگین ۲۰ تماس در ساعت باشد و هر متصدی به طور متوسط ٦ دقیقه صرف هر تماس گیرنده کند، زمان سرویس تقریباً به طور نمایی توزیع شده باشد، و به طور متوسط هر مشتری ۷۰ دلار برای هر سفر بپردازد، زیان روزانه ناشی از محدودیت امکانات سرویس به طور متوسط چقدر

1- Fly-Bynite.

است؟ (می‌توان فرض کرد که تعداد افرادی که در طول ساعات غیر اوج از دست می‌روند قابل چشمپوشی است). اگر هزینه مزایا و دستمزد متصدی ۸ دلار در ساعت بوده و یک متصدی باید در یک شیفت ۸ ساعته کار کند، تعداد بهینه کارمندانی که باید استخدام کرد چند نفر است؟ سه ساعت اوج در طول شیفت ۸ ساعتی رخ می‌دهد. در تمامی ساعات دیگر، یک متصدی می‌تواند تمام ترافیک را عهده‌دار باشد و از آنجا که شرکت هیچ‌گاه مرکز مکالمات را تعطیل نمی‌کند، در خارج شیفت دقیقاً از یک متصدی استفاده می‌شود. فرض کنید که هزینه افزایش خطوط به مرکز مکالمه ناچیز باشد.

(۲-۳۶) نشان دهید که نتایج به دست آمده برای مدل سرویس کننده فراوان $(M/M/\infty)$ را همچنین می‌توان به وسیله گرفتن حد وقتی که $c\to\infty$ است از نتایج مدل $M/M/c/\infty$ به دست آورد.

(۲-۳۷) انجمن مکاتبه‌ای خوشنویسی یک دوره مکاتبه‌ای برای خوشنویسی به صورت خودآموز ارائه می‌کند. پذیرشهای جدید در هر زمان پذیرفته شده و درخواست‌کننده می‌تواند بلافاصله ثبت نام کند. یادداشتهای گذشته دلالت بر آن دارد که پذیرش‌ها از توزیع پواسان با میانگین ۸ نفر در ماه پیروی می‌کنند. میانگین زمان تکمیل یک درخواست‌کننده ۱۰ هفته است و توزیع زمانهای تکمیل نمایی‌اند. به طور متوسط، در هر زمان داده شده، چند "هنرآموز" در مدرسه ثبت نام کرده‌اند؟

(۲-۳۸) کاربردی از مدل $M/M/\infty$ در حیطه «کنترل موجودی» به شرح زیر است. سازنده یک کالای بسیار گران قیمت و با تقاضای نادر از سیاست کنترل موجودی زیر استفاده می‌کند. او ذخیره ایمنی S واحد در دسترس را حفظ می‌کند. تقاضای مشتری برای کالا به صورت فرایند پواسان با میانگین λ توصیف می‌شود. هر بار که تقاضای واحدی از محصول به عمل می‌آید (تقاضای یک مشتری) به کارخانه سفارش داده می‌شود تا محصول دیگری را تولید کند (این امر "سیاست سفارش دهی یک به یک"[1] نامیده می‌شود). زمان لازم برای تولید یک واحد محصول نمایی با میانگین $1/\mu$ است. هزینه

1- one-for-one.

نگهداری موجودی در قفسه h دلار برای یک واحد محصول برای یک واحد زمان که در قفسه می‌ماند، خواهد بود (نماینده هزینه سرمایه گرفتار در موجودی که می‌توانست سرمایه گذاری شود و سود عاید کند، هزینه‌های بیمه، خرابی محصول و غیره)، و هزینه کمبود موجودی p دلار برای هر واحد محصول (کمبود موجودی موقعی اتفاق می‌افتد که مشتری واحدی را درخواست می‌کند و کالا در قفسه نیست، یعنی ذخیره ایمنی به صفر رسیده است) است. فرض می‌شود که مشتریانی که خواهان واحدی هستند، اما ملاحظه می‌کنند که کالایی برای دسترسی فوری وجود ندارد، صبر می‌کنند تا اینکه موجودی از طریق سفارشهایی که داده شده است مهیا شود. (این امر سفارشهای عقب افتاده نامیده می‌شود)؛ بنابراین می‌توان هزینه p را به عنوان تخفیف به مشتری مورد توجه قرار داد، از این رو که مشتری برای تأمین تقاضایش معطل مانده است.

بنابراین مسئله یافتن مقدار بهینه S می‌شود که متوسط هزینه‌های کل را در واحد زمان حداقل کند؛ به عبارت دیگر، S ای جست‌وجو کرد که رابطه زیر را حداقل کند:

$$E[C] = h\sum_{z=1}^{S} zp(z) + p\lambda \sum_{z=-\infty}^{0} p(z) \qquad \text{[دلار در واحد زمان]}$$

که در آن z سطح موجودی در دست در حالت پایدار (+ نشان دهنده کالاهای در قفسه و - کالاهای عقب افتاده است) و $p(z)$ تابع فراوانی احتمال است. $\sum_{z=1}^{S} zp(z)$ متوسط مقدار ذخیره ایمنی و $\lambda\sum_{z=-\infty}^{0} p(z)$ متوسط تعداد سفارشهای عقب افتاده در واحد زمان است، زیرا $\sum_{z=-\infty}^{0} p(z)$ در صد زمانی است که هیچ ذخیره ایمنی در قفسه وجود ندارد و λ متوسط نرخ تقاضا است. اگر $p(z)$ را بتوان تعیین کرد، می‌توان $E(C)$ را نسبت به S بهینه کرد.

الف) رابطه بین Z و N را مشخص کنید، که در آن N دلالت بر تعداد سفارشهای در راه (یعنی تعداد سفارشهایی که در حال حاضر در کاخانه مورد فرایند قرار گرفته‌اند) می‌کند. در نتیجه $p(z)$ را به p_n ربط دهید.

(ب) نشان دهید که $\{p_n\}$ احتمالات حالت پایدار یک صف $M/M/\infty$ است، اگر

روش پردازش سفارش به عنوان سیستم صف مورد بررسی قرار گیرد. به وضوح بیان کنید که مکانیزمهای ورودی و سرویس چه هستند.

(پ) مقدار بهینه S را به ازای ماه/واحد $\lambda=8$، روز $1/\mu=3$، (نگهداری شده) ماه/واحد/دلار $h=50$، و واحد تأخیر شده در سفارش / دلار $p=500$ به دست آورید.

(۲-۳۹) نشان دهید که معادله (۲-۷۵) نرخهای ورودی میانگین مؤثر λ'، را برای مدلهای زیر به دست می‌دهد:

(الف) $\lambda' = \lambda$, $M/M/1/\infty$, $M/M/c/\infty$

(ب) $\lambda' = \lambda\ (1-p_k)$, $M/M/1/K$, $M/M/c/K$

(پ) مدل M ماشین و c تعمیرکار , $\lambda' = \lambda\ (M-L)$

(۲-۴۰) با استفاده از معادله (۲-۶۸) رابطه برگشتی بین p_{n+1} و p_n برای مدل اصلی تعمیر ماشین را به دست آورید.

(۲-۴۱) در مورد مدل اصلی تعمیر ماشین (بدون امکانات یدکی) نشان دهید که $q_n(M)$، احتمالات نقطه (ورود) خرابی برای جمعیتی به اندازه M برابر $p_n(M-1)$، یعنی، احتمالات زمان کلی برای جمعیتی به اندازه $M-1$ است. گاهی اوقات به q_n عنوان "احتمالات مشاهده کننده درونی" اشاره می‌شود، در حالیکه به p_n به عنوان "احتمالات مشاهده کننده برونی" اشاره می‌شود.

(۲-۴۲) $q_n(M)$ را که توسط معادله (۲-۷۹) برای موقعیت تعمیر ماشین با امکانات یدکی داده شده است به دست آورید و نشان دهید که $p_n(M-1)$ با برابر نیست، بلکه مساوی $p_n(Y-1)$ است. محاسبات جبری بسیار پیچیده است و لذا تنها برای یک مثال عددی $[\lambda/\mu=1$ ، $c=1$ ، $Y=1$ ، $M=2]$ نشان دهید. در حالی که این موضوع اثبات نشده است، اما می‌توان نشان داد که به طور کلی برقرار است *.

(۲-۴۳) یک خشکشوئی که با سکه کار می‌کند ۵ ماشین دارد. ویژگیهای عملیاتی ماشینها به

*- به نوشته سویک و میتران *(Sevick and Mitran-1979)* یا لاونبرگ و ریزر *(Lavenberg and Reiser-1979)* مراجعه کنید.

گونه‌ای است که هر ماشین مطابق فرایند پواسان با میانگین نرخ خرابی یکی در روز از کار می‌افتد. یک تعمیرکار می‌تواند یک ماشین را مطابق توزیع نمایی با متوسط زمان تعمیر نصف یک روز رفع عیب کند. در حال حاضر سه تعمیرکار مشغول به کارند. مدیر، آقای لوسندرت[1]، مایل است که به جای این سه تعمیرکار از یک تعمیرکاری بسیار ماهر استفاده کند که دستمزدش با کل دستمزد سه تعمیرکار فعلی برابر است، لیکن وی قادر است یک ماشین را در یک سوم زمان رفع عیب کند، یعنی، در یک ششم روز. آیا این فرد به کار گرفته شود؟

(۲-۴۴) فرض کنید که هر یک از ۵ ماشین در یک کارگاه معین مطابق قانون پواسان با نرخ متوسط یکی در هر ۱۰ ساعت از کار بیفتند، و ماشینهای از کار افتاده یکی در هر زمان به وسیله دو تعمیرکار که به صورت دو کانال کار می‌کنند تعمیر شوند، به طوریکه هر ماشین به طور متوسط نیازمند ۵ ساعت برای سرویس است که به طور نمایی توزیع شده است.

(الف) احتمال اینکه دقیقاً یک ماشین در هر زمان "سالم" باشد، چقدر است؟

(ب) اگر کارایی کارگر به وسیله نسبت متوسط زمان انتظار به متوسط زمان سرویس اندازه‌گیری شود، این معیار برای موقعیت فعلی چقدر است؟

(پ) اگر یک ماشین یدکی مشابه درنظر گرفته شود، پاسخ بند (الف) چه خواهد بود؟

(۲-۴۵) احتمالات حالت پایدار برای مسأله تعمیر ماشین با M ماشین، Y یدکی، و c تعمیرکار $(c\le Y)$ را اما با نظم زیر پیدا کنید: اگر هیچ وسیله یدکی در دست نباشد و ماشینی خراب شود $(n=Y+1)$ ، $M-1$ ماشین باقیمانده در حال کار متوقف می‌شوند تا زمانی که یک ماشین تعمیر شود؛ یعنی، اگر ماشینها باید کار کنند، لازم است که M ماشین به طور همزمان کار کنند.

(۲-۴۶) در مدل‌بندی دنیای واقعی، اکثراً، حتی وقتی که جمعیت تقاضاکننده محدود است، به طور تقریبی از یک مدل منبع نامحدود استفاده می‌شود. برای مقایسه دو مدل، L را برای مثال (۲-۵) با این فرض که جمعیت تقاضاکننده (تعداد ماشینها) نامحدود است،

1- *Lew Cendirt.*

محاسبه کنید. همچنین L را برای یک مدل دقیق، زمانی که تعداد ماشینها به ترتیب ۱۰ و ۵، و در هر دو حالت $M\lambda = \frac{1}{3}$ باشد، محاسبه و آن را با محاسبات یک مدل منبع نامحدود تقریبی مقایسه کنید. فکر می‌کنید که ρ چگونه بر تقریب مؤثر باشد؟ (راهنمایی: موقعی که از یک مدل منبع نامحدود به عنوان تقریبی برای مدل منبع محدود استفاده می‌شود، λ باید برابر $M\lambda$ تعریف شود.)

(۲-۴۷) متوسط هزینه‌های عملیاتی در ساعت را برای مثال (۲-۶) پیدا کنید، وقتی که:

(الف) $C_1 =$ هزینه سرعت پائین $= ۵$ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$ ؛ $C_2 =$ هزینه ساعت بالا $= ۱۰$ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$

(ب) $C_1 = ۵$ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$ ؛ $C_2 = ۱۲$ $\frac{\text{دلار}}{\text{ساعت کارکرد}}$

(پ) بند (ب) را در ازای $k = ۴$ ارزیابی کنید. اکنون بهترین سیاست کدام است؟

(۲-۴۸) فرض کنید یک مدل سرویس دو حالته "وابسته به حالت" مانند آنچه که در قسمت (۲-۸) مطرح شد، با $\rho_1 = \frac{4}{3}$ و $\rho_2 = \frac{2}{3}$ داشته باشیم. فرض کنید که مشتریان، ماشینهای چمن زنی شرکت خدماتی گرین تام لان[1] باشد و لازم است که این ماشینها در زمانهای تصادفی، به وسیله ماشینهای گریس کاری دو سرعتی شرکت، گریسکاری شوند. به علاوه تصور کنید که هزینه هر ساعت عملیات گریسکار در سرعت پایین، C_1، برابر ۵ دلار و در سرعت بالا، C_2، ۲۲ دلار است. همچنین شرکت برآورد کرده است که هزینه از کار افتادن یک چمن زن یک دلار در ساعت خواهد بود. نقطه انتقال سرعت بهینه، k، چیست؟ (راهنمایی: چندین مقدار k را با شروع از $k=1$ امتحان و هزینه مورد انتظار کل را محاسبه کنید).

(۲-۴۹) احتمالات اندازه سیستم در حالت پایدار را برای یک مدل سرویس وابسته به حالت نمایی، ورودی پواسان، و c سرویس کننده که در آن میانگین نرخ سرویس، وقتی که $k>c$ نفر در سیستم باشند، از μ_1 به μ منتقل می‌شود به دست آورید.

(۲-۵۰) احتمالات اندازه سیستم در حالت پایدار را برای یک مدل سرویس وابسته به حالت

1- Green Thumb Lawn Service Co.

نمایی، ورودی پواسان، و تنها یک سرویس کننده با میانگین نرخ‌های $\mu_1(1 \le n < k_1)$، $\mu_2(k_1 \le n < k_2)$، و $\mu(n \ge k_2)$ به دست آورید.

(۲-۵۱) در مورد یک موقعیت امتناع $M/M/1$ می‌دانیم که توزیع ایستا به وسیله دو جمله‌ای منفی داده شده است:

$$p_n = \binom{N+n-1}{N-1} x^n (1+x)^{-N-n} \qquad (n \geqslant 0, x > 0, N > 1).$$

مطلوبست تعیین L، L_q، W، W_q، و b_n

(۲-۵۲) در مورد یک مدل امتناع $M/M/1$، می‌دانیم که $b_n = e^{-\propto n/\mu}$ است. p_n را در ازای جمیع مقادیر n تعیین کنید.

(۲-۵۳) تصور کنید که مدل عدم تمایل $M/M/1$ که در قسمت ۲-۹-۲ عنوان شد، دارای تابع امتناع $b_n = \frac{1}{n}$, $0 \le n \le k$ و 0 در ازای $n > k$، و تابع عدم تمایل $r(n) = \frac{n}{\mu}$ باشد. توزیع اندازه سیستم ایستا را پیدا کنید.

(۲-۵۴) نام یک شرکت زیرک را جعل (ابداع) کنید و برای مؤلفان بفرستید، اما موردی نباشد که منحصراً آنان را به ستوه آورد و در بیان صادق باشید.

(۲-۵۵) تبدیل‌های لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

(الف) e^{kt}

(ب) $t^{k-1}\,\Gamma(k)$

(پ) $\sin kt$

(ت) $\int_0^a [1 - \cos tx)x^2]dx$

(۲-۵۶) با استفاده از خواص تبدیل‌های لاپلاس و جداول ضمیمه ۴، توابعی را پیدا کنید که "تبدیل لاپلاس" آنها به صورت زیر داده شده است.

(الف) $(s+1)/(s^2+2s+2)$

(ب) $1/(s^2-3s+2)$

(پ) $1/[s^2(s^2+1)]$

(ت) $e^{-s}/(s+1)$

(۲-۵۷) خاصیت ۵ جدول $A4.2$ را اثبات کنید. یعنی، اگر $f(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه $\bar{f}(s+a)$ تبدیل لاپلاس $e^{-at}f(t)$ خواهد بود.

(۲-۵۸) خاصیت ۱ جدول $A4.2$ را نشان دهید، یعنی، $\mathcal{L}\{\sum_i a_i f_i(t) = \sum_i a_i \bar{f}_i(s)$

(۲-۵۹) تابع فراوانی پواسان را از معادله (۱-۱۵) با استفاده از تابع مولد $P(z,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n$ به دست آورید.

(۲-۶۰) نتیجه‌گیری رفتار موقت $M/M/1/\infty$ را برای $n<i$ به پایان برسانید.

(۲-۶۱) نشان دهید که احتمال اینکه تعداد افراد در یک سیستم $M/M/1/\infty$ در یک نقطه دلخواه از زمان بزرگتر یا مساوی j باشد به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sum_{n=j}^{\infty} p_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\sum_{n=j-i}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\,t) + \sum_{n=j+i+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-n/2} I_n(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\right].$$

(۲-۶۲) حل حالت پایدار $M/M/\infty$ را مستقیماً از رفتار موقت نتیجه بگیرید.

(۲-۶۳) تعداد متوسط در یک سیستم $M/M/\infty$ را در هر نقطه از زمان، از معادله (۲-۱۱۵) پیدا کنید.

(۲-۶۴) معادله دیفرانسیل جزئی مربوط به رابطه (۲-۱۱۲) را برای فرآیند تولد ـ مرگ وابسته به زمان، جایی که λ_n به وسیله $\lambda(t)$ جایگزین شده است و $\mu_n=n\mu$ باشد، پیدا کنید. آنگاه برای تابع مولد حل کنید. فرض کنید حالت اولیه مطابق توزیع پواسان انتخاب شده است.

(۲-۶۵) برای مدل $M/M/\infty$، حل موقت، $p_n(t)$، را موقعی که حالت اولیه یک باشد، یعنی $p_1(0)=1$ و $p_n(0)=0\ ,\ n\neq 1$ پیدا کنید.

(۲-۶۶) در مورد مسئله (۲-۶۵)، $p_0(t)$ و $p_3(t)$ را به‌صورت توابعی از زمان رسم کنید (فرض کنید حالت اولیه صفر باشد). مقادیر حالت پایدار p_0 و p_3 را روی گراف نشان دهید.

(۲-۶۷) معادله (۲-۱۱۷) را به دست آورید.

(۲-۶۸) با کاربرد مستقیم مباحث ارزش انتظاری، نشان دهید که در یک صف $M/M/1$،

طولهای مورد انتظار پریودهای بیکاری و مشغول به ترتیب $1/\lambda$ و $1/\mu-\lambda$ هستند.

پروژه‌های کامپیوتری

مسائل زیر پروژه‌های کامپیوتری هستند. از یک کامپیوتر (ریز پردازنده‌ها کاملاً مناسب هستند) و یک زبان به انتخاب خودتان (فرترن، پاسکال، بیسیک، و غیره) استفاده کنید. در برنامه‌های خود، آزادانه از دستورالعملهای "تشریحی"[1] استفاده کنید، به نحوی که خواندن برنامه تا حدّ امکان ساده شود. همچنین به فرمت‌های مناسب برای ورودی و خروجی توجه کنید. در فهرست برنامه، یک دستورالعمل تشریحی قرار دهید و زبان و ماشین مورد استفاده را مشخص کنید.

(۲-۶۹) $M/M/c$: در ازاء هر λ، μ و c، k، و t: مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، $Pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئله (۲-۲۲) برانید و از $c=۱,۲,۳,۴$؛ $k=۲,۴$؛ و $t=۶۰,۱۸۰$ دقیقه (به ترتیب ۱ ساعت و ۳ ساعت) استفاده کنید.

(۲-۷۰) $M/M/c/K$: در ازای هر λ، μ، c، K، k، و t: مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، p_k، $Pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئلهٔ (۲-۳۴) در ازای $K=۶,۷$ برانید. به ترتیب از $k=۲,۴$ و $t=۲,۳$ ساعت استفاده کنید.

(۲-۷۱) مدل تعمیر ماشین با امکانات یدکی: در ازای هر λ، μ، c، M، Y (شامل $Y=0$)، k، و t مطلوب است محاسبهٔ L، L_q، W، W_q، $pr\{N\geq k\}$، $Pr\{T_q\geq t\}$. این برنامه را برای مسئله (۲-۴۳) برای حالات $Y=0$ و به ترتیب استفاده از $k=۱,۲$ و $t=۰/۱,۰/۲$ روز برانید. همچنین حالت زیر را برانید: $M=۱۰$، $Y=۲$، $\lambda=۱$، $\mu=۳/۵$، $c=۳$. در اینجا، به ترتیب برای $k=۲,۴$ و $t=۰/۱,۰/۲$ برانید.

(۲-۷۲) مدل تولد ـ مرگ کلّی: بگذارید فضای حالت محدود N (مثلاً حداکثر ۱۰۰) باشد و ورودی $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,...\lambda_{N-1})$ و $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_N)$ باشند. در ازای بردارهای λ و μ ورودی، p_0، p_n، و L را محاسبه کنید. اگر چنانچه توانایی گرافیکی نیز دارید، هیستوگرام p_n را رسم کنید. برنامهٔ خود را با رانش‌های موارد زیر کنترل کنید: الف) مسئلهٔ ۲-۷۰ (۲-۳۴) و (ب) $\lambda=(۱,۱,۲,۲,۳,۱)$ $\mu=(۱,۱,۱,۲,۲,۲)$.

1- Comment.

مسائل فصل چهارم

(۴-۱) مطلوب است تعیین حل [معادله (۴-۵)] معادلات (۴-۴) با استفاده از معادله (۱-۱۷)، معادله (۲-۴۱)، و شرط مرزی $F_n(0)=p_n$، مطابق روش بخش (۱-۸).

(۴-۲) نشان دهید که تعداد در سیستم در زمان t پس از آخرین خروجی، $N(t)$، و زمان بین خروجیهای متوالی، T، متغیرهای تصادفی مستقلند [راهنمایی: توزیع احتمال حاشیه‌ای $N(t)$ را از رابطه (۴-۵۲) پیدا کنید و نشان دهید که حاصل ضرب آن و $c(t)$ توزیع احتمال توأم را ارائه می‌کند.] همچنین نشان دهید که زمان‌های بین دو خروجی متوالی مستقلند.

(۴-۳) در مورد مثال (۴-۱) همان مقیاسهای کارایی را با استفاده از اینکه سه پیشخوان پرداخت در حال کار هستند، محاسبه کنید. اگر شما مشاور می‌بک بودید، در مورد تعداد پیشخوانهای در حال کار چه پیشنهادی ارائه می‌دادید؟

(۴-۴) در مورد یک صف سری با دو ایستگاه (یک سرویس کننده در هر ایستگاه) با ورودی پواسان به اولی با پارامتر λ، سرویس‌نمایی در هر ایستگاه با پارامترهای به ترتیب μ_1 و μ_2 فقدان حد بر تعداد در سیستم در هر ایستگاه، نشان دهید که احتمال حالت پایدار که n_1 در سیستم ایستگاه اول (صف و سرویس) و n_2 در سیستم ایستگاه دوم باشند، به صورت زیر خواهد بود:

$$p_{n_1,n_2} = p_{n_1}p_{n_2} = \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

[راهنمایی: معادلات دیفرانسیل برای $p_{n_1,n_2}(t)$ را پیدا کنید و سپس از آنها معادلات دیفرانس حالت پایدار را پیدا کنید. با جایگزینی نشان دهید که $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}p_{0,0}$ جوابی برای این معادلات است و آنگاه $p_{0,0}$ را با شرط مرزی $\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}p_{n_1,n_2}=1$ پیدا کنید.]

(۴-۵) یک سیستم صف سری با سه ایستگاه (یک سرویس کننده در هر ایستگاه) با ورودی پواسان، پارامتر λ، و سرویس نمایی، پارامترهای به ترتیب μ_1، μ_2، μ_3 را در نظر بگیرید. هیچ حد ظرفیتی بر صف در جلوی دو ایستگاه اول وجود ندارد، لیکن در

ایستگاه سوم حد k (شامل سرویس) وجود دارد. اگر k در ایستگاه سوم باشند، آنگاه هر ورودی بعدی، اجازه ورود به سیستم را پیدا نمی‌کند. تعداد مورد انتظار در سیستم (هر سه ایستگاه) و زمان مورد انتظار صرف شده در سیستم به وسیله یک مشتری که هر سه مرحله سرویس را تکمیل می‌کند را تعیین کنید.

(۴-۶) نتایج (۴-۸) را از (۴-۷) و شرط مرزی به دست آورید.

(۴-۷) معادلات دیفرانس حالت پایدار برای یک سیستم با یک سرویس کننده و دو ایستگاه متوالی با ورودی پواسان پارامتر λ و سرویس نمایی با پارامترهای به ترتیب μ_1 و μ_2 را به دست آورید، که در آن تشکیل صف در جلوی ایستگاه یک مجاز نبوده و حداکثر یک مشتری مجاز است بین ایستگاهها منتظر بماند. وقفه موقعی رخ می‌دهد که یک مشتری در ایستگاه دو منتظر بوده و یک مشتری در ایستگاه یک تکمیل شده است. برای حالتی که $\mu_1=\mu_2$ بوده، احتمالات حالت پایدار را پیدا کنید.

(۴-۸) در مورد صف سری سه ایستگاهه با وقفه که در جلوی ایستگاه ۱ صف نامحدود مجاز است امّا هیچ صفی در جلوی ایستگاه‌های ۲ یا ۳ مجاز نیست، هشت توصیفگر حالت سیستم چیست؟

(۴-۹) در مورد یک شبکه جکسون باز، (الف) مجموعه معادلات (۴-۹) تعادل حالت پایدار را تعمیم دهید تا c_i سرویس کننده در هر گره مجاز باشد و (ب) نشان دهید که جواب داده شده به وسیله (۴-۱۲)، رابطه (۴-۹) را ارضا می‌کند. [راهنمایی: در اصلاح رابطه (۴-۹) از فاکتور $a_i(n_i)$ استفاده کنید.]

(۴-۱۰) رستوران چینی ون هانگ ری[1] دو نوع خوراک سرو می‌کند، چومین[2] و اسپیرریبز[3] دو پنجره جداگانه وجود دارد، یکی برای چومین و یکی برای اسپیرریبز. مشتریان مطابق فرایند پواسان با نرخ میانگین ۲۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. ۶۰ درصد به سراغ چومین می‌روند و ۴۰ درصد به طرف پنجره ریب. ۲۰ درصد آنهایی که از پنجره چومین خرید کرده‌اند، سپس به پنجره ریب می‌روند؛ ۸۰

1- *Won Hung Rhee.*
2- *Chow-mein.*
3- *Spare-ribs.*

درصد دیگر رستوران را ترک می‌گویند. ۱۰ درصد آنهایی که ریب خریده‌اند، سپس به پنجره چومین می‌روند، در حالی که ۹۰ درصد دیگر ترک می‌کنند. به طور متوسط تکمیل یک سفارش چومین، ۴ دقیقه و تکمیل یک سفارش اسپیرریب، ۵ دقیقه به طول می‌انجامد. زمانهای سرویس نمایی هستند. به طور متوسط، چند نفر در رستوران هستند؟ متوسط انتظار در هر پنجره چقدر است؟ اگر شخصی هم چومین و هم ریب بخواهد، به طور متوسط، چه مدتی را در رستوران صرف می‌کند؟

(۴-۱۱) برای یک شبکه جکسون بسته، (الف) مجموعه معادله (۴-۱۴) تعادل حالت پایدار را تعمیم دهید تا c_i سرویس کننده در هر گره مجاز باشد و (ب) نشان دهید که جواب داده شده توسط رابطه (۴-۲۱)، رابطه (۴-۱۴) را ارضا می‌کند. [راهنمایی: راهنمایی مسئله (۴-۹) را ببینید.]

(۴-۱۲) مسئله‌ای مانند مثال (۴-۲) را در نظر بگیرید، اما فرض کنید مدیریت تصمیم گرفته است که سرویس کننده دیگری را مشابه فردی که هم‌اکنون وجود دارد به گره دو اضافه کند. قابلیت‌های دسترسی حالت پایدار را پیدا کنید که (الف) هر دو ماشین در حال کار باشند، و (ب) حداقل یکی در حال کار باشد.

(۴-۱۳) نشان دهید که برای یک ماشین، یک تعمیرکار، حل به دست آمده از معادله (۲-۶۸) در بخش (۲-۷) همانند حل به دست آمده از معادله (۴-۳۰) است.

(۴-۱۴) معادله (۴-۳۰) را برای چند سرویس کننده تعمیم دهید.

(۴-۱۵) مسئله (۲-۴۴) را با استفاده از نتیجه صف حلقه‌ای به دست آمده از مسئله (۴-۱۴)، حل کنید.

فصل پنجم

مدلهایی که الگوهای ورودی کلّی یا الگوهای سرویس کلّی دارند

برای مدلهایی که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، تجزیه و تحلیل چپمن کلموگرو مانند فصلهای قبل ممکن نیست، زیرا ما دیگر بعلت برداشتن فرض نمایی از روی زمانهای بین ورودی متوالی و / یا زمانهای سرویس، دیگر یک فرایند مارکوف نخواهیم داشت. به هر حال، برای بسیاری از مدلهایی که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرند، در حالی که دیگر یک فرایند مارکوف نداریم، با این وجود در درون این فرایند احتمالی غیرمارکوفی یک زنجیرهٔ مارکوف جا داده شده است (که به عنوان یک زنجیرهٔ مارکوف جا داده شده مورد اشاره قرار می‌گیرد، بخش ۱۰-۱ را ببینید). برای این نوع مدلها، ما می‌توانیم برخی از تئوری زنجیره‌های مارکوف (بخش ۱۰-۱) را برای تجزیه و تحلیل خود به کار گیریم. ابتدا ما مورد ورودی پواسان و سرویس کلّی با یک سرویس‌کننده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۵-۱) صفهای تک‌سرویس‌کننده با ورودی‌پواسان و سرویس‌کلّی $(M/G/1)$

سیستم را در لحظه‌ای که سرویس یک مشتری تکمیل شده و سرویس مشتری بعدی که در صف بوده در شرف شروع شدن است، در نظر بگیرید. زمانهای سرویس متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان با توزیع احتمالی اختیاری خواهند بود. ما توزیع احتمالی جمعی (CDF) را با $B(t)$ و تابع چگالی را در صورتی که وجود داشته باشد، با $b(t)$ مشخص می‌کنیم. فرایند ورودی، مانند سابق، پواسان با پارامتر λ است. فرایند احتمالی جا داده شده $X(t_i)$، جایی که X دلالت بر تعداد افراد در سیستم می‌کند و t_1، t_2، t_3،... زمانهای متوالی تکمیل سرویس هستند، به طریق زیر می‌توان نشان داد که مارکوفی است. نظر به اینکه t_i زمان تکمیل مشتری iام می‌باشد، سپس $X(t_i)$ تعداد مشتریانی است که مشتری iام در موقع خروجی (هنگام ترک سیستم) پشت سر خود باقی می‌گذارد. به علّت اینکه فضای حالت